NEWTONI PRINCIPIA.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER

EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA,

MATHESEOS PROFESSORUM.

EDITIO NOVA,

SUMMA CURA RECENSITA.

4

VOLUMEN QUARTUM.

GLASGUÆ:

EX PRELO ACADEMICO,

TYPIS ANDREÆ ET JOANNIS M. DUNCAN.

VENEUNT APUD LACKINGTON & SOC., R. PRIESTLEY, G. & W. B. WHITTAKER, J. CUTHEL, G. COWIE & SOC., J. COLLINGWOOD, TREUTTEL & WÜRTZ, ET TREUTTEL, JUN. & RICHTER, LONDINI; NECNON PARISIIS, ET ARGENTORATI APUD TREUTTEL & WÜRTZ.

1822.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

VOLUMINIS TERTII CONTINUATIO,

COMPLECTENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

INTRODUCTIO

AD

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

Tria sunt in Lunæ Theoriâ spectanda, in quibus versatur omnis quæstio astronomica quæ de ipsâ institui potest; primùm, ejus motus quâtenus e Terrâ observatur; secundò, figura lunaris orbitæ a circulo plùs minusve recedens et apsidum ejus positio; ac tertiò, ejus orbitæ ad eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus suos ageret, Luna ellipsim quamlibet circa Terram describere posset in plano quovis, et ea ellipsis perpetuò eadem maneret constantemque angulum cum eclipticâ efficeret; itaque tota theoria Lunæ circa hæc versaretur elementa, primò, ut ex tempore quod Luna consumeret ut a quâdam stellâ discedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus mensis periodici siderei sicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri potest, ita ut, datâ epochâ, hoc est, dato loco cœli in quo Luna aliquando observata fuisset, inde quem in locum migrare debuisset, dato tempore, per medii motûs calculum inveniri posset.

Postea; locus apogæi Lunæ, quod in cœlis eidem puncto semper responderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ, sic enim figura ellipseos quam Luna describit obtineretur, et quia, citra Solis actionem, Luna moveretur secundùm legem Keplerianam, hoc est, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem sint proportionalia angulis e Terrâ spectatis, sed areis descriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ lunaris figurâ per methodos notas, quæ differentia dicitur æquatio Lunæ soluta, hoc est, æquatio a Sole non pendens, et intelligetur quibus in locis illa æquatio sit adhibenda ex situ cognito apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex situ Lunæ in orbe suo respectu apogæi sui.

Tertiò. Quærendum foret observationibus, quibus in locis Luna eclipticam secet, cui nempe cœli loco respondeant ejus nodi, qui in hac hypothesi fixi forent, et quonam angulo orbita Lunæ foret inclinata ad eclipticam, unde quoniam ea inclinatio constans esset, distantiâ Lunæ a plano eclipticæ per perpendiculum mensuratâ, foret semper proportionata distantiæ perpendiculari Lunæ a lineâ nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ et nodorum cognosci poterit quonam sub angulo Luna ab eclipticâ distare videatur ex ipsâ Terrâ; et ad quodnam punctum eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis considerentur, tabulæ astronomicæ lunares hæc continere debebunt.

Primò. Epocham loci Lunæ dato aliquo tempore; tum observationem loci apogæi quod fixum maneret, et observationem loci nodorum pariter fixorum.

Postea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam æquationis Lunæ secundùm ejus distantiam mediam ab apogæo; tabulam latitudinis Lunæ secundùm variam distantiam Lunæ a nodo et denique tabulam reductionis Lunæ ad eclipticam, secundùm eam distantiam Lunæ a nodo.

Possunt his addi, tabula distantiarum Lunæ a Terrâ secundùm ejus distantiam ab ejus apogæo, tabula diametrorum ejus apparentium secundùm eamdem distantiam ab apogæo, et denique tabula parallaxeos quâ deprimitur Luna respectu spectatoris in superficie Telluris collocati, prout diversa est ejus a Terrâ distantia, et prout altitudo supra horizontem est diversa.

Talis foret tota de Lunâ theoria, citra Solis actionem; sed jam a longo tempore intellexerunt astronomi, lunares motus a Lunæ situ respectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, sive æquationes variis titulis concinnare sunt conati.

Quàm luculenter ex gravitatis theoriâ, hæc non modò explicentur, sed etiam accurato calculo determinentur, demonstrare aggressus est Newtonus, et eas omnes æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex theoriâ suâ deductis ita feliciter statuit ut motus Lunæ ejusve æquationes ex calculo repertæ in minuto secundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus observationibus determinari potuerunt, consentiant, quod autoritatem integram illi theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles sunt, nec compendiosi, nec semper commodè ad syntheticam formam reducendi; quos Newtonus hâc ultimâ ratione lectori suo sistere potuit, eos enucleatè tradit, cæteros omittit, et quod ex iis obtinetur strictim in Scholio indicat, et primo quales sint illæ æquationes juxta astronomorum observationes dicit, et quibusnam legibus secundum ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant et quænam sint earum leges.

Ipsum tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo et ipsum exinde tabulas lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis ill. Cassini tabulis, ita ut quo perfectiùs cœli motus dignoscunt astronomi, eo propiùs ad Newtonianas theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam et ejus orbitam habeatur ratio; primum fiat abstractio excentricitatis orbitæ tam Telluris quàm Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis periodicus Lunæ longior evadat et ejus orbita ex circulari in ellipsim mutetur, cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam orbita Lunæ induit, quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum tangentem orbitæ lunaris dirigitur, nascitur variatio quam Tycho primus observavit, et maximam in octantibus 40½′. statuit, illam ill. Cassinus facit 33′. 40″. in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris et Lunæ esse circulares 35′. 10″. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò, ex eâ Solis actione nascitur motus apogæi lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò, inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; quintò denique, inclinationis orbitæ lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. et XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cùm Terra est in perihelio suo quàm in aphelio; inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; primùm cùm mensis periodicus Lunæ per actionem Solis longior evadat, et motus ejus medius augeatur, id incrementum quando Terra est in perihelio majus est quàm cùm est in aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti, quod ad totam Lunæ theoriam pertinet, incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ a Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâdem ratione, variationes motus apogæi et motus nodorum ex situ diverso Terræ ad aphelium aut perihelium suum ex utriusque motu medio dato in secundo paragrapho derivare docetur.

His ex excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur consideratio excentricitatis orbitæ lunaris, aut ejus inclinationis ad eclipticam: inde novæ irregularitates prioribus adnascuntur.

Primò, mensis periodicus paulo major fit cùm linea apsidum per Solem transit quàm cùm ipsi est perpendicularis, hinc correctio nova æquationi motus medii, quæ in primo Scholii paragrapho exponitur, est facienda, hanc novam æquationem ill. Cassinus exhibet in tabella cujus titulus est *Secunda Æquatio Solaris* et tertio paragrapho Scholii traditur.

Itidem si linea nodorum per Solem transeat, paulo major erit Solis actio, et correctio nova exinde nascetur eidem motui medio, hanc quarto paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipsa orbitæ lunaris ex diverso situ apogæi respectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit, idque etiam inæqualiter pro distantiâ Telluris a Sole.

Rursus ipse motus apogæi prout apogæum diversimodè situm est respectu Solis mutatur, hinc æquatio apogæi nascitur eaque duplex, prima supponendo Telluris a Sole distantiam constantem, altera verò pendet ex mutatione distationæ Telluris a Sole.

Hinc tandem cùm orbitæ lunaris forma, excentricitas et apogæi positio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem solutam constituebant; ultimo autem Scholii paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones sint instituendæ: omnia verò in hoc Scholio sine demonstratione tradit, nec indicato suorum calculorum artificio, ideóque nostri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis insistere debuit, labore quidem non parvo, successu qualicumque, utinam lectoribus non ingrato.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

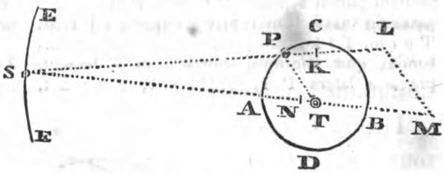
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

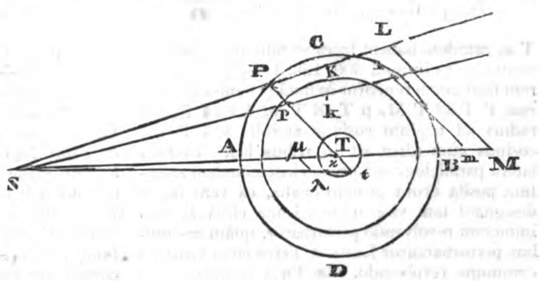
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

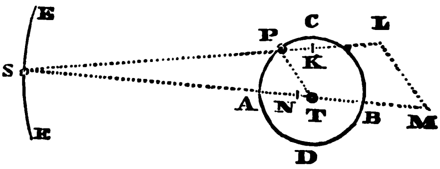
DESIGNET S Solem, T Terram, P Lunam, C A D B orbem Lunæ. In S P capiatur S K æqualis S T; sitque S L ad S K in duplicatâ ratione S K ad S P, et ipsi P T agatur parallela L M; et si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam S T vel S K, erit S L gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus S M, L M, quarum L M et ipsius S M pars T M perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. et ejus Corollariis expositum est. (q) Quâ-



(q) * *Quâtenus Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus;* designet ut prius S Solem, sed sit T centrum commune gravitatis Terræ et Lunæ; sit itaque p Luna et t Terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque S p, S t, sumptisque in eis lineis productis si opus sit S k, S κ æqualibus S T, secatisque S l et S λ ita ut sint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p et ad S t, actisque l m, λ μ parallelis ad p t, si exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in Solem, exponent S l et S λ vires accelerantes Lunam et Terram in Solem, et perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires l m et λ μ, T m et T μ; quæ vires con-

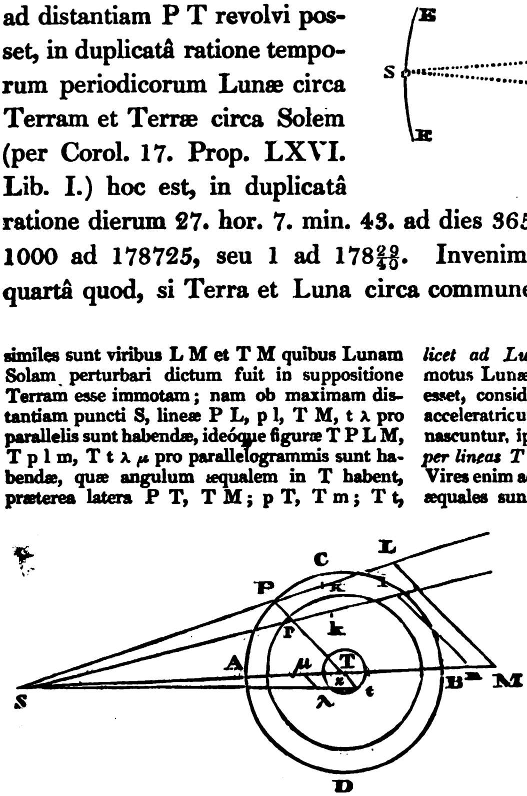


tenus Terra et Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, et summas virium per lineas ipsis analogas T M et M L designare. (1) Vis M L in mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam P T revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram et Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicatâ



ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si Terra et Luna circa commune gravitatis centrum revol-

similes sunt viribus L M et T M quibus Lunam Solam perturbari dictum fuit in suppositione Terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ P L, p l, T M, t λ pro parallelis sunt habendæ, ideóque figuræ T P L M, T p l m, T t λ μ pro parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t,



T μ, eamdem habent inter se rationem; demonstratur enim in notâ 500. Lib. I. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut radius ad triplum cosinus anguli A T P qui cosinus cùm idem sit in tribus hisce casibus, latera parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa Terram immotam revolvendo perturbatur, quàm eas quibus perturbarentur Luna et Terra circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

Sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu Terræ, quasi hæc immota esset, consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricum, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur, ipsi tribui debent, *et summas virium per lineas T M et M L ipsis analogas designare.* Vires enim acceleratrices p T et T t simul junctæ æquales sunt soli vi P T et similem effectum edunt, admovent utique corpora p et t, secundum directionem p T t, si ergo vis acceleratrix P T summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: vires M T, T μ divellunt corpora a se mutuò secundùm directionem S T, idem verò præstat vis T M quæ summæ ambarum est æqualis, nam est p T : T t : : m T : T μ : : ergo p T : p T + T t : : m T : m T + T μ et alternando p T : m T : : (P T : M T) : : p T + T t : m T + T μ. Sed est p T + T t = P T ergo etiam m T + T μ = M T.

(1) * *Vis M L in mediocri suâ quantitate,* &c. Ob magnam Solis distantiam figura P T M L est parallelogrammum ideóque M L est proximè æqualis lineæ P T, ergo vis M L erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut P T ad S K sive S T, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut radii circulorum qui per eas describuntur et inversè ut quadrata temporum periodicorum, ergo ea vis quâ Sol agit in punctum T, est ad vim quâ Luna in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa Terram quiescentem) ut S T

vantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproximè. (s) Et vis quâ Luna in orbem circa Terram quiescentem, ad distantiam P T semidiametrorum terrestrium 60, revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; (t) et hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideóque vis mediocris M L est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò et ex proportione linearum T M, M L, (u) datur etiam vis T M: et hæ sunt vires solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q. e. i.

ad P T directè, et ut quadratum temporis periodici Lunæ circa Terram ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem; ergo compositis rationibus, vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suô retinetur, ut quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum temporis periodici Terræ circa Solem, hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei.

(s) * *Et vis quâ Luna ad distantiam* $60\frac{1}{2}$ *semid. revolvi posset, est ad vim quâ ad distantiam 60 semid. revolvi posset eodem tempore, ut* $60\frac{1}{2}$ *ad 60.* Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè et tempora periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.). Cùm ergo hîc tempora periodica æqualia ponantur, vires centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. Terræ quæ revera intercedit inter Terram et Lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim quâ Luna in orbe suo retinetur, æstimaverat quasi Terra immota esset, et Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. a Terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa Terram revolveretur; verùm cùm Terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ et Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est eâ quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa Terram immotam revolveretur, et est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa Terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis ellipseos quam unum circa alterum motum describit, est ad axem ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore periodico et eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam et corpus alterum; quare cùm Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, et prima duarum medieproportionalium inter 43 et 42 sit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. Terræ eodem ipso tempore periodico, quod observatur circa Terram immotam, revolvi posset.

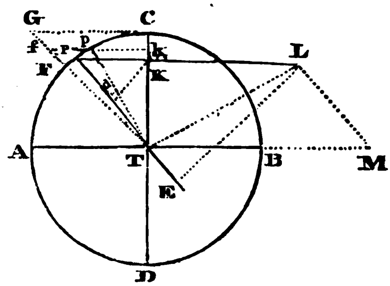
(t) * *Et hæc vis*, &c. Per hujusce Libri Prop. IV.

(u) * *Datur etiam vis T M.* Ob parallelas P T, L M et ingentem puncti S distantiam, P L et T M sunt parallelæ, et figura P T L M est parallelogrammum, ideóque T M sumitur ut proximè æqualis P L; est autem P L triplum cosinus anguli A T P existente T P sive L M radio: nam quia S K est æqualis S T, si centro S radio S T describatur arcus T K, erunt S T et S K in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proximè coincidit cum rectâ T C perpendiculari lineæ S T in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in eâ rectâ T C occurret et S K sive P K illi rectæ T C erit perpendicularis, ideóque P K erit cosinus anguli A T P; sed, per constructionem, est SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut S K (sive $SP + SK$) ad $SL - SK$ (sive K L) ideóque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem S P, ergo est $KL = 2PK$, et $PK + KL$ sive $PL = 3PK$. Q. e. d.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quâtenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, et inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam, ponamus etiam lineas S P, S T sibi invicem parallelas esse. (x) Hoc pacto vis L M reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem T P, ut et vis T M ad mediocrem suam quantitatem 3 P K. Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim T L; et hæc vis, si in radium T P demittatur perpendiculum L E, resolvitur in vires T E, E L, quarum T E, agendo semper secundùm radium T P, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ T P C radio illo T P factam; et E L agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius a quadraturâ C ad conjunctionem A, singulis temporis momentis facta, est (y) ut ipsa vis accelerans E L, (z) hoc est, ut $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$. Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (a) (quod eodem ferè recidit) per angulum C T P, vel etiam per arcum C P. Ad C T erigatur normalis C G ipsi C T æqualis. Et diviso arcu



(x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipsa vis accelerans* (13. Lib. I.).

(z) * *Hoc est ut* $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$. Nam triangula P T K, P L E sunt similia propter angulum communem in P et angulos rectos K et E, ergo est T P : T K :: P L : E L $= \frac{PL \times TK}{TP}$, (sed per notam u) est P L $=$ 3 P K ergo est E L $= \frac{3\,PK \times TK}{TP}$.

110. (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem lunarem esse circularem, angulus C T P vel arcus C P forent proportionales tempori, semotâ consideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc verò perturbatio respectu ipsius motûs Lunæ est exigua, itaque anguli C T P vel arcus C P tempori ferè proportionales censeri possunt.

quadrantali A C in particulas innumeras æquales P p, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque p k perpendiculari ad C T, jungatur T G ipsis K P, k p productis occurrens in F et f; et erit F K æqualis T K, et (b) K k erit ad P K ut P p ad T p, (c) hoc est in datâ ratione, (d) ideóque F K × K k seu area F K k f, erit ut $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$, id est, ut E L; et compositè, area tota G C K F ut summa omnium virium E L tempore toto C P impressarum in Lunam, (e) atque ideò etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ C T P, seu incrementum momenti. (f) Vis quâ Luna circa Terram quiescentem ad distantiam T P, tempore suo periodico

(b) * *K k erit ad P K ut P p ad T p* sive T P; ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola p q perpendicularis ad P K, ea erit parallela et æqualis lineæ K k, formabiturque triangulum fluxionale P p q simile triangulo P K T, nam cùm anguli p P K et K P T rectum simul efficiant, et pariter anguli K P T et P T K, æquales sunt anguli p P K et P T K, unde est p q sive K k ad P K ut P p ad T P.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim P p ad T p est data, quia singulæ partes P p sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium T P.

(d) * *Ideóque F K × K k seu area F K k f ut* $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$; cùm ratio K k ad P K sit data, data etiam erit ratio K k ad 3 P K, et hæc ratio manebit etiamnum data si consequens 3 P K per quantitatem constantem T P dividatur; erit ergo data ratio K k ad $\frac{3\,P\,K}{T\,P}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales F K et T K multiplicentur, ergo ratio K k × F K (seu areæ F K k f) ad $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$ est etiam data, hoc est, est area F K k f ut $\frac{3\,P\,K \times T\,K}{T\,P}$.

(e) * *Atque ideò etiam ut velocitas* (13. Lib. I.).

(f) * *Vis quâ Luna circa Terram ad distantiam T P tempore suo periodico C A D B revolvi posset, efficeret ut corpus liberè cadendo tempore C T describeret longitudinem ½ C T,* &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

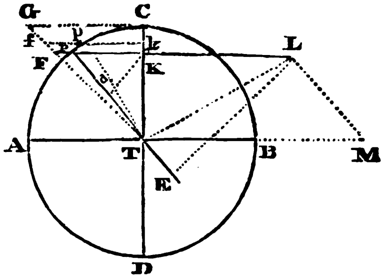
Nam si sumatur arcus quàm minimus, altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quàmminimus describeretur, foret ejus arcûs minimi sinus versus; sed ex naturâ circuli, factum diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcûs, sive quadrato arcûs ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eamdem vim centrifugam liberè descriptum (ideóque etiam facta horum spatiorum per diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcûs correspondentis, ergo et alterum factum erit æquale quadrato arcûs correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcûs eodem tempore revolvendo uniformiter percursi.

Quod cùm ita sit, cadat liberè corpus per ½ C T, h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per diametrum seu 2 C T factum $C\,T^2$ sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcûs eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio C T, sed velocitas acquisita liberè cadendo per radii semissem ½ C T talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis radium, nempe integrum C T eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcûs quam corpus uniformiter revolvens descripsisset eodem tempore; ergo velocitas acquisita lapsu per ½ C T ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

Ea denique longitudo ½ C T percurretur tempore quod erit ad totum tempus periodicum ut C T ad circumferentiam C A D B, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti; sed tempus, quo corpus per ½ C T labitur, est æquale tempori quo arcus æqualis C T percurritur, ergo est illud tempus ad totum tempus periodicum ut C T ad totam peripheriam C A D B.

C A D B dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore C T cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}$ C T, et velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cùm autem perpendiculum K d in T P demissum ([g]) sit ipsius E L pars tertia, et ([h]) ipsius T P seu M L in octantibus pars dimidia, vis E L in octantibus, ([i]) ubi maxima est, superabit vim M L ([k]) in ratione 3 ad 2, ideóque erit ad vim illam, quâ Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ([l]) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, et tempore C T velocitatem generare deberet ([m]) quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem C P A velocitatem majorem generaret in ratione C A ad C T seu T P. Exponatur vis maxima E L in octantibus per aream F K × K k rectangulo ([n]) $\frac{1}{2}$ T P



([g]) * *K d sit ipsius E L pars tertia.* Ob triangula similia P L E, P K d est E L ad K d ut P L ad P K, (sed per notam [u]) est P K tertia pars lineæ P L, est itaque pariter K d tertia pars lineæ E L.

([h]) * *K d ipsius T P seu M L in octantibus pars dimidia;* nam in octantibus anguli K T d, P K d, K P d sunt omnes 45 grad. est itaque T d = K d = d P; est ergo T d sive K d ipsius T P pars dimidia in octantibus.

111. ([i]) * *Ubi maxima est.* Ut inveniatur punctum in quod vis E L sive $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$ est maxima, sit $TP = r$, $TK = x$, $PK = y$ erit $EL = \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio est $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima est ergo E L ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideóque ubi $ydx = -xdy$, sed cùm in circulo sit $y = \sqrt{rr - xx}$, et $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{rr-xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr-xx} = \frac{xxdx}{\sqrt{rr-xx}}$ et reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ et $dy = -dx$, et $y = x$; ideóque in triangulo P T K angulus T debet esse 45 grad. et P debet esse in octante circuli.

([k]) * *In ratione* 3 *ad* 2. Est E L ad K d ut 3 ad 1 (not. [g]) est K d ad T p sive M L ut 1 ad 2 (not. [h]) ergo E L ad M L ut 3 ad 2, ex æquo.

([l]) * *Ut* 100 *ad* $\frac{2}{3}$ $17872\frac{1}{2}$. Vis E L est ad vim M L ut 3 ad 2; vis M L est ad vim quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem revolvi posset tempore suo periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad $17872\frac{1}{2}$; ergo compositis rationibus vis E L est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad $2 \times 17872\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideóque vis E L est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ.

([m]) *Quæ esset pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis lunaris.* Patet ex notâ ([f]) vim quâ Luna revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempore C T eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

([n]) * *Exponatur vis maxima E L in octantibus per aream F K × K k rectangulo* $\frac{1}{2}$ *T P × P p æqualem,* vis E L semper est proportionalis areæ F K × K k ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est F K sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ et $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

$\times$ P p æqualem. (o) Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis C P generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor E L eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}$ T P $\times$ C P ad aream K C G F: tempore autem toto C P A, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$ T P $\times$ C A et triangulum T C G, sive ut arcus quadrantalis C A et radius T P. Ideóque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. (p) Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius; et si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ A, ac differentia 11915 — 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in syzygiis et quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium F K C G ad triangulum T C G (r) vel quod perinde est, ut quadratum sinûs P K ad quadratum radii T P, (s) (id est, ut P d ad T P) et summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P.

(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis C P generat ad velocitatem quam generant vires veræ E L eodem tempore agentes ut $\frac{1}{2}$ T P $\times$ C P ad aream K C G F*, velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur, ductæ in tempus per quod generantur, cùm itaque supponatur omnes arcus P p temporibus quamproximè æqualibus describi, si ii arcus P p æquales inter se sumantur (vid. not. [a] præced.) velocitates genitæ, dum arcus P p percurruntur, sunt ut ipsæ vires sive ut areæ F K k f, ideóque summa velocitatum genitarum tempore C P, sive dum arcus C P describitur, est ut tota area K C G F, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore P p, est $\frac{\text{T P} \times \text{P p}}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ F K k f, qui valor est ipse valor areæ P T p, ergo si singulis momentis P p similis velocitas generaretur, summa velocitatem genitarum tempore C P foret area C T P sive $\frac{1}{2}$ T P $\times$ C P, ergo velocitas quam vis maxima generat, est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem C P, ut $\frac{1}{2}$ T P $\times$ C P ad K C G F.

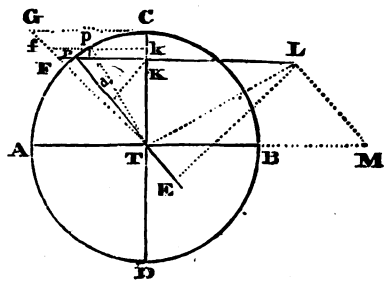
(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cùmque Luna per vim E L certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cùm orbis lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cùmque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur et auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem, eam nempe quâ orbita lunaris tempore suo periodico uniformiter describeretur esse mediam proportionalem arithmeticè inter velocitatem minimam et maximam. Hanc tamen propositionem quasi evidentem assumere non licuit, si enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quàm magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quàm magnis; hinc exponenda est prius ratio quâ crescunt illæ velocitates, ut possimus asserere mediocrem velocitatem Lunæ esse mediam arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur problemate huic propositioni mox subjungendo.

(r) * *Vel quod perinde est ut quadratum sinûs P K ad quadratum radii T P* area T C G est ad aream T K F ut quad. T C ad quad. T K et dividendo T C G — T K F (sive F K C G) ad T C G ut T C ^{2} — T K ^{2} (sive P K ^{2}) ad T C ^{2}.

(s) * *Id est ut P d ad T P* est P d ad P K ut P K ad T P propter similitudinem triangulorum P K d, P T K, ergo per compositionem rationum est P d ad T P ut P K ^{2} ad T P ^{2}.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod Sol et Terra quiescunt, et Luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cùm autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. et min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideóque momentum areæ in quadraturâ Lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, et ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973 + P d, (t) existente videlicet T P æquali 100.

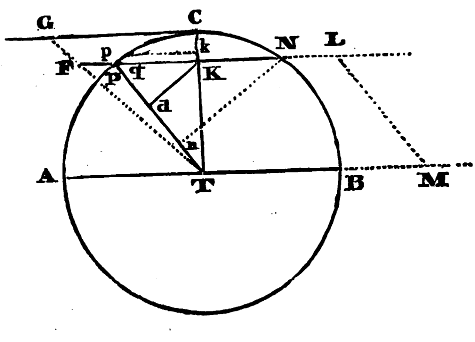


Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè (u) ut summa numeri 219,46 et sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. (x) Sin

(t) * *Existente videlicet T P æquali* 100: sequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 est ad 100 ut est P d ad P T, si ergo P T sit æqualis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut summa numeri* 219,46 *et sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ in circulo cujus radius est unitas;* areæ momentum in puncto P est ut 10973 + P d, est autem P d dimidium sinûs versus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L secat circulum, erit arcus P C N duplus distantiæ P C a quadraturâ proximâ, ductâque N n perpendiculari in radium P T erit P n sinus versus duplicatæ illius distantiæ, sed cùm N n et K d sint perpendiculares in eamdem lineam ideóque parallelæ, et sit punctum K medium lineæ P N, erit etiam d medium lineæ P n, eritque P d = $\frac{1}{2}$ P n, sive erit P d dimidium sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, est ergo momentum areæ ut summa numeri 10973 + $\frac{1}{2}$ P n existente radio 100, seu ut hujus quantitatis duplum 21946 + P n ideóque si radius sit 1 ut 219,46 + P n.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major sit,* &c. Manente eâdem hypothesi, Lunæ orbem esse circularem et Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis nascitur quæ per lineam E L designatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna esse deberet si velocitate suâ mediocri



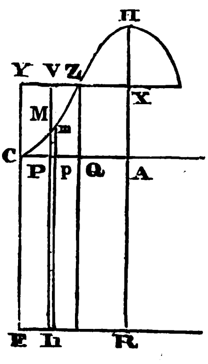
moveretur tempore dato C P, et locum in quo reverâ est tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex problemate sequenti exponere facile erit.

variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione.

PROBLEMA.

Ex hypothesibus et demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundùm quam describuntur areæ C T P A momenta.

Designet recta C A (in 2dâ. figurâ) tempus quo arcus C A describitur, erigantur per singula puncta P rectæ P M perpendiculares in C A et proportionales velocitati tempore C P per vim E L genitæ; per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcûs C P sunt ut trapezia F K C G correspondentia, illa verò trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcûs dupli C P, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares P M æquales sinui verso arcus 2 C P, ultima perpendicularis A H erit æqualis ipsi diametro A B, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva C M H per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam A R perpendicularis ad C A, sitque A H ad A R ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Luna ferretur si

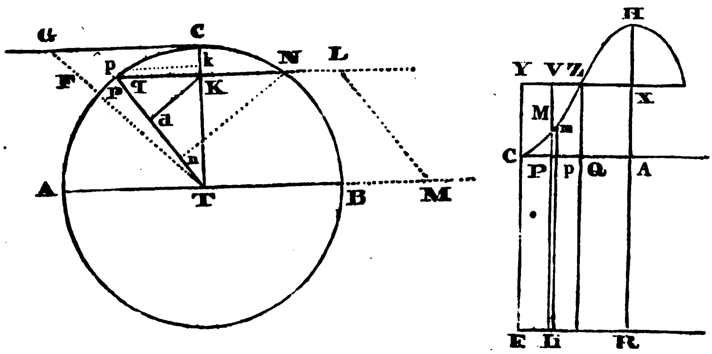


vis E L omninò non ageret, absolvaturque parallelogrammum A R E C, productâque lineâ M P usque ad lineam R E tota linea I M erit ut velocitas Lunæ tempore C P, et ducta linea quamproxima m p i erit area M P I m p i ut area descripta tempore P p, et tota area R E C M H repræsentabit totam aream tempore C A descriptam; denique secetur A H in X et ducatur X Y parallela C A quæ secet curvam C M H in Z et ex puncto Z ducatur ordinata Z Q. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut parallelogrammum X R E Y sit æquale mixtilineo H A R E C M H, erit X R velocitas Lunæ mediocris, et C Q tempus quo Luna a quadraturâ profecta ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R sit media proportionalis arithmetica inter R A et R H et præterea quod punctum Q cadet in medio inter A et C, ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcûs medio temporis respondeat, quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area H A P C M H, dicatur v arcus C P et dicatur m v recta C P quæ arcui C P est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) et P p sit m d v, sinus rectus P K arcus C P dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis trigonometriæ principiis sinus versus dupli arcûs C P est $\frac{2\,y\,y}{r}$, ergo ordinata P M ei æqualis est $\frac{2\,y\,y}{r}$, et elementum areæ sive M P p m est $\frac{2\,y\,y}{r}$ m d v, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{r\,r - y\,y}$ ad r ut d y ad d v, est ergo $d\,v = \frac{r\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2\,m\,y\,y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli, radio T C descripti, dicatur C K, z, K k, d z, elementum P p k K est y d z, sed est T K ($\sqrt{r\,r - y\,y}$) ad P K (y) ut P q (d y) ad q p (d z) hinc $d\,z = \frac{y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ et elementum areæ circuli fit $\frac{y\,y\,d\,y}{\sqrt{r\,r - y\,y}}$ quod elementum est ad elementum correspondens areæ H A P C M H ut 1 ad 2 m, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis T C P A ut 2 m ad 1, sive si totus arcus C P A dicatur c et recta C P A dicatur m c, area H A P C M H erit m r c. Ergo si linea A R quæ designat velocitatem uniformem Lunæ, cùm nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit m l c et tota area H A R E C H erit m l c + m r c, sive æqualis parallelogrammo cujus unum latus foret m c, alterum l + r, sed R E ex constructione est æqualis m c, ergo si sumatur R X = l + r parallelogrammum X R E Z erit æquale mixtilineo H A R E C M H, ideóque erit R X sive l + r velocitas Lunæ mediocris, sed erat A H = 2 r, ideóque R H = l + 2 r est ergo R X (l + r) media proportionalis arithmeticè inter R A (l) et R H (l + 2 r), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) et maximam (l + 2 r).

Quoniam verò ordinata Z Q = A X = r est sinus versus arcûs dupli C P, et est r sinus versus arcûs quadrantalis, ergo in hoc casu C P ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

Ex hujus autem problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, et ejus valorem esse m l v + m r v, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum C E I M; spatium



C E I P est m l v, spatium verò C P M, est ad aream C P K ut 2 m ad 1; tota area C T P est $\frac{r\,v}{2}$, spatium P K T est $\frac{y \times K\,T}{2}$, ergo area C P K est $\frac{r\,v - y \times K\,T}{2}$, est itaque spatium C P M $=$ m r v $-$ m y $\times$ K T et tota area C E I M est m l v + m r v $-$ m y $\times$ K T; unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam et aream reverâ descriptam esse m y $\times$ K T, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio a quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygiâ A, quia illic m y $\times$ K T $=$ o, a syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ constructione.

2°. Ut quantitas m l c + m r c est ad rectangulum y K $\times$ T K, ita est quadrans circuli C P A T ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ C T P motu mediocri descriptâ, sive, quoniam C P A T est dimidium facti radii in arcum C P A, et ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut m l c + m r c ad m y $\times$ T K ita arcus quadrantalis C P A sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times T\,K}{l + r}$ sive $\frac{P\,K \times T\,K}{l + r}$.

3°. Quoniam quantitates l c + r c, et arcus quadrantalis C P A sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut P K $\times$ T K, sive ut factum sinûs arcûs C P in ejus cosinum.

4°. Rectangulum T K $\times$ P K est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima est in octantibus, unde fluit hoc paradoxum, ubi vis E L maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motûs sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* nam velocitas quæ generatur, exprimitur per aream C K F G (vide figuram textûs) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, et area C K F G illic evadit æqualis areæ P K T, ergo velocitas in octantibus genita est ut T K per P K, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut T K per P K, (per hujusce notæ Corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti a quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus, ideóque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verùm ex actione T M aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut T K $\times$ P K per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut T K $\times$ P K, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terrâ.

(y) Area, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiæ Lunæ a Terrâ conjunctim; et propterea distantia Lunæ a Terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè et subduplicatâ ratione motus horarii inversè. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantia a Terrâ. (z) Tentent astronomi quàm probè hæc Regula cum phænomenis congruat.

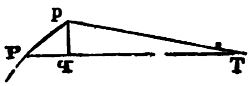
Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè et quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono esse inter se in ultimâ

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ et quadratum distantiæ Lunæ a Terra.* Designet T P p aream



descriptam a Lunâ quovis tempusculo, sitque P p arcus curvæ cujuslibet; centro T radio T p describatur arcus circularis P q qui pro rectâ perpendiculari in lineam T p assumi potest, ideóque area a Lunâ descripta erit ut T P $\times$ p q, gradus autem, aut minuta in arcu p q contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore, qui æqualis est motui horario Lunæ, ideóque longitudo absoluta ejus arcûs p q erit ut ejus radius T P et motus horarius Lunæ conjunctim, hinc area T P $\times$ p q erit ut T P ^{2} et motus horarius Lunæ conjunctim.

(z) * *Tentent astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus periodi et simul angulum inter Solem et Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC a quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis P T Lunæ a Terrâ: nam, per præced. Prop. area a Lunâ descripta, est ut summa numeri 219.46 et sinus versi dupli anguli P T C quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ P T, et inversè ut Lunæ diametri apparentes. Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs quàm antehac definiri potest.* Orbis lunaris figura definiri potest per observationes diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis a puncto quodam fixo; sicque cùm distantiæ Lunæ sint his diametris apparentibus reciprocæ, longitudines distantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum secari possunt et per eas extremitates duci potest curva orbi lunari similis: sed observatio diametri cujuslibet corporis lucidi est nimis lubrica ut satis tuta esse possit hæc methodus; faciliùs tutiusque observabuntur motus horarius Lunæ ejusque distantia a quadraturâ proximâ, hinc itaque accuratiùs cognitâ ratione distantiarum Lunæ a Terrâ in datis angulis, accuratiùs definietur quàm antehac orbis lunaris.

(b) *Curvaturas linearum,* &c. Curvatura lineæ est ejus deflexio a tangente, et æstimari proportione sinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. (c) Attractio autem Lunæ in Terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim solarem 2 P K quâ gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem vel ab eâ superatur. (d) In quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram et vis solaris K T, quâ Luna in Terram trahitur. (e) Et hæ attractiones, si $\frac{AT + CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ et $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; seu ut 178725 $N \times CTq - 2000 \times ATq \times CT$ et 178725 $N \times ATq + 1000\, CTq \times AT$. Nam si

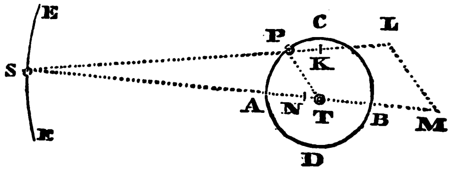
debet per angulum inter tangentem curvæ et curvam nascentem interceptum; illi anguli sunt semper quamminimi, ideóque, juxta principia trigonometrica, suis sinubus, suisve tangentibus sunt proportionales: hinc Newtonus ponit curvaturas linearum esse in ultimâ proportione tangentium angulorum contactûs, si tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur tangentes illæ, describerentur per continuationem velocitatis corporis uniformis secundum tangentem curvæ, ideóque quantulicumque sumantur, tempora quibus describentur erunt inversè ut illæ velocitates, tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur, sunt attractionis effectus, siquidem supponitur illam attractionem agere secundùm perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus est semper ut ipsa vis et quadratum temporis per quod agere concipitur, saltem si tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere censenda sit; ergo illæ tangentes sunt ut attractio directe et quadratum velocitatis inversè, et in eâdem ratione sunt anguli contactûs sive curvaturæ linearum.

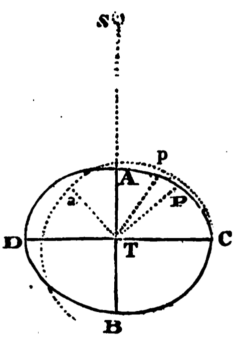
(c) *Attractio Lunæ in Terram in syzygiis est excessus gravitatis supra vim solarem 2 P K.* Ex iis quæ in Propositione XXV. demonstrata sunt, liquet per actionem Solis, Lunam a Terrâ distrahi ubicumque sita sit per vim T M, ad illam verò attrahi per vim L M, vis T M sive P L est semper æqualis 3 P K (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) et est P L cosinus anguli A T P qui cosinus in syzygiis est æqualis radio, ita ut P T sive L M eo in casu sit æqualis P K, ergo Luna attrahitur ad Terram in syzygiis per vim gravitatis et per vim L M sive P K, et distrahitur ab eâ per vim 2 P K, superest itaque attractioni Lunæ in Terram in syzygiis excessus gravitatis supra vim solarem 2 P K.

(d) *In quadraturis* autem evanescit vis T M, attractio ergo Lunæ in Terram est summa ejus gravitatis et vis L M sive C T sive K T quia in quadraturis puncta K et C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones si $\frac{AT + CT}{2}$ dicatur N, &c.* Ex Propositione XXV. constat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe suo in mediocri suâ distantiâ N esse ad vim solarem mediocrem T M ut 178725 ad 1000, ideóque ad vim 2 P K in syzygiis æqualem 2 T M ut 178725 ad 2000, sed distantiis A T, C T inæqualibus evadentibus variant istæ vires, est enim vis gravitatis in distantiâ N ad vim gravitatis in distantiâ A T ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideóque si prior exprimatur per 178725, erit posterior $\frac{178725\, N^2}{AT^2}$, et simili ratiocinio vis gravitatis in distantia C T erit $\frac{178725\, N^2}{CT^2}$, vires verò solares 2 P K, K T, crescunt ut ipsæ distantiæ; quare si vis 2 P K in distantiâ N sit 2000, in distantiâ A T erit $\frac{2000\, AT}{N}$, et si vis T M in quadraturis sit 1000 in eâ distantiâ N, erit ea vis in distantiâ C T,



$\frac{1000\, CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\, N^2}{AT^2} - \frac{2000\, AT}{N}$, et in quadraturis gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris M L, quæ in quadraturis est P T vel T K et Lunam trahit in Terram, erit 1000, et vis mediocris T M in syzygiis erit 3000; de quâ, si vis mediocris M L subducatur, manebit vis 2000 quâ Luna in syzygiis distrahitur a Terrâ, quamque jam ante nominavi 2 P K. (f) Velocitas autem Lunæ in syzygiis A et B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C et D, ut C T ad A T et momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 C T ad 10973 A T. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè et ratio prior semel directè, et fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725 \times ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\, ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\, ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\, CTqq \times AT$, (h) i. e. ut $2151969 \times AT \times CT \times N - 24081\, AT$ cub. ad $2191371 \times AT \times CT \times N + 12261\, CT$ cub.



Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin D B C A, in cujus centro T Terra collocetur, et cujus axis major D C quadraturis, minor A B syzygiis interjaceat. (i) Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, et trajectoria, cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in ellipsi illâ revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura C p a, cujus puncta singula p

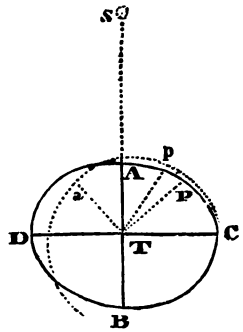
$\frac{178725\, N^2}{CT^2} + \frac{1000\, CT}{N}$, sive omnia dividendo per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\, AT}{N^2 \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\, CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium arithmeticum inter A T et C T quorum differentia est exigua, pro medio geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut fit $N^2 = AT \times CT$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ et in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ et reductione factâ ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\, N \times CT^2 - 2000\, AT^2 \times CT$ ad $178725\, N \times AT^2 + 1000\, CT^2 \times AT$.

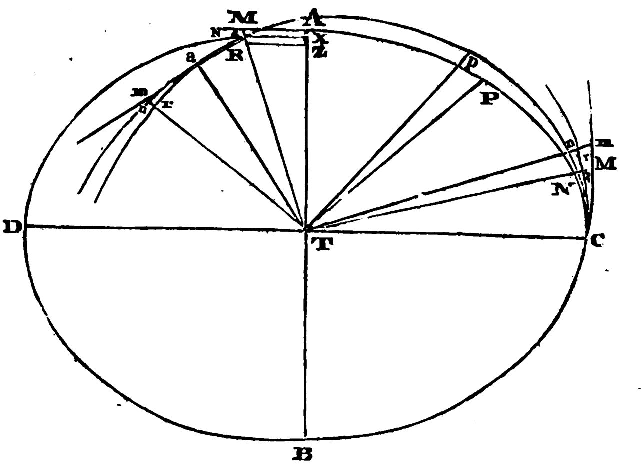
(f) * *Velocitas Lunæ*, &c. Quoniam in syzygiis et quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis A T, C T, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus et radii A T, C T conjunctim, ii arcus, dato tempore descripti, sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis et quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta et radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè et ratio* simplex attractione *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis*, &c.

(h) * *I. e. ut.* Dividendo per $AT \times CT$, numeros signo × conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

(i) * *Cùm autem planum ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur.* Axis enim inveniuntur capiendo punctum quodvis P in ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, et ducendo T p æqualem T P, eâ lege ut angulus P T p æqualis sit motui apparenti Solis a tempore quadraturæ C confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus C T p sit ad angulum C T P ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus C T a in eâdem ratione ad angulum rectum C T A; et sit longitudo T a æqualis longitudini T A; et erit a apsis ima et C apsis summa orbis hujus C p a. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis C p a in vertice a, et curvaturam circuli centro T intervallo T A descripti, sit ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice A et curvaturam ejusdem circuli, (m) in duplicatâ ratione anguli C T P ad angulum C T p;





minor hujus ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideóque eodem motu quo Sol circa Terram revolvitur, axis iste sive planum ellipseos circa Terram fertur.

(l) * *Quod eodem ferè recidit:* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

(m) * *In duplicatâ ratione anguli C T P ad angulum C T p.* Centro T intervallo T A describatur circuli arcus A R a r, sit arcus A R ad arcum a r in ratione datâ anguli C T P ad angulum C T p, ducantur radii T R, T r et producantur ita ut tangentibus in A et a ductis occurrant in M et m, occurrant verò ellipsi in N, et curvæ C p a in n; erit N R = n r, quia ex constructione T n sumitur æqualis T N, et radii T R, T r sunt æquales; evanescentibus autem arcubus r a et R A curvatura orbis C p a in a erit ad curvaturam circuli radio T A descripti, ut m n ad m r, et ideo differentia inter curvaturam orbis C p a in a et curvaturam circuli radio T A descripti est ad curvaturam ejusdem

(n) et quod curvatura ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius, in duplicatâ ratione T A ad T C; et (o) curvatura circuli illius ad curvaturara circuli centro T intervallo T C descripti, ut T C ad T A; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in C, in duplicatâ ratione T A ad T C; (q) et differentia inter curvaturam ellipseos in vertice C et curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ C p a in vertice C et curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli C T p ad angulum C T P. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. (r) His autem

circuli ut m r — m n sive n r aut R N ad m r, simili modo patet quod curvatura circuli radio T A descripti est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice A et curvaturam ejusdem circuli ut M R ad N R. Ideóque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis C p a in a et curvaturam circuli radio T A descripti, est ad differentiam inter curvaturam ellipseos in A et curvaturam ejusdem circuli ut M R, ad m r, hoc est, (Cor. 1. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcûs R A ad arcum r a, sive (per const.) in ratione duplicatâ anguli C T P ad angulum C T p.

(n) * *Et quod curvatura ellipseos in A*, &c. Curvatura ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio T A descripti in ratione M N ad M R; ducatur verò N X tangenti parallela, et axi occurrens in X, et pariter R Z, erit per proprietatem ellipseos $A X \times X B$ ad $N X^2$ ut $T A^2$ ad $T C^2$, et per proprietatem circuli erit $A Z \times Z B = R Z^2$, sed quia sumuntur quantitates nascentes est $A X = M N$, $A Z = M R$, $X B = A B = Z B$ et $N X = R Z$, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit $M N \times A B : M R \times A B :: T A^2 : T C^2$ ideóque est M N ad M R, sive curvatura ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione T A ad T C.

(o) * *Curvatura circuli*, &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inversè ut eorum radii (not. 121. Lib. I.)

(p) * *Hujus autem curvatura* potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice C*, &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (m): centro C intervallo T C describatur circuli arcus C R r, sit arcus C R ad arcum C r, in ratione anguli C T P ad angulum C T p ducatur tangens C M m, et radii T R M, T r m quorum prior occurrat ellipsi in N, posterior curvæ C p a in n, erit N R = n r propter æquales T N, T n per curvæ const. et radios æquales T R, T r; evanescentibus arcubus C N, C n, curvatura ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio T C descripti ut M N ad M R, ideóque curvaturarum ellipseos et circuli differentia est ad curvaturam circuli ut R N ad M R, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis C p a ut m r ad m n, ideóque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis C p a et circuli ut m r ad r n: itaque compositis rationibus erit curvaturarum ellipseos et circuli differentia ad curvaturarum orbis C p a et circuli differentiam ut m r ad M R hoc est in ratione duplicatâ arcûs r C ad arcum R C, sive in ratione duplicatâ anguli C T p ad angulum C T P.

(r) *His autem inter se collatis*, &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur s tempus revolutionis synodicæ, et t tempus revolutionis periodicæ, eritque angulus C T P ad angulum C T p ut t ad s.

(1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti, est ad differentiam curvaturarum ellipseos in A et ejusdem circuli ut t t ad s s (not. m).

(2) Curvatura ellipseos in A ad curvaturam circuli radio T A descripti ut $T A^2$ ad $T C^2$ (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum ellipseos in A et circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut $T C^2 - T A^2$ ad $T C^2$: et per compositionem 1ª et 3ª proportionis.

(4) Est differentia curvaturarum orbis C p a in a et circuli radio T A descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut $s t \times \overline{T A^2 - T C^2}$ ad $s s \times T C^2$.

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A descripti ut $s s T C^2 - t t \times \overline{T C^2 - T A^2}$ ad $s s \times T C^2$.

(6) Curvatura circuli radio T A descripti, ad curvaturam circuli radio T C descripti ut T C ad T A.

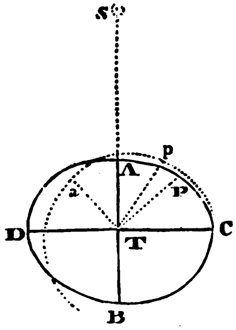
(7) Curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam ellipseos in C ut $T A^2$ ad $T C^2$.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli et ellipseos in C ut $T A^2$ ad $T C^2 - T A^2$.

(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C et ejus circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et ejusdem circuli ut s s ad t t; et per compositionem 8ª et 9ª proportionis est.

(10) Curvatura circuli radio T C descripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C et

inter se collatis, prodit curvatura figuræ C p a in a ad ipsius curvaturam in C, ut A T cub. + $\frac{16824}{100000}$ C T q × A T ad C T cub. + $\frac{16824}{100000}$ A T q × C T. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum C T P et C T p applicatam ad quadratum anguli minoris C T P, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, et $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.



Igitur cùm a designet syzygiam Lunæ, et C ipsius quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis Lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio C T ad A T, duco extrema et media in se invicem. Et termini prodeuntes ad A T × C T applicati, fiunt 2062.79 C T q q — 2151969 N × C T cub. + 368676 N × A T × C T q + 36342 A T q × C T q — 362047 N × A T q × C T + 2191371 N × A T cub. + 4051.4 A T q q = 0. Hic pro terminorum A T et C T semisummâ N scribo 1, et pro eorundem semi-differentiâ ponendo x, fit C T = 1 + x, et A T = 1 — x: (s) quibus in æquatione scriptis, et æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0.00719, et inde semi-diameter C T fit 1.00719, et semi-diameter A T 0.99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ et $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Est igitur distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet excentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

ejusdem circuli ut $TA^2 \times s^2$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio T C descripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut $TA^2 \times s^2$ ad $TA^2 \times s^2 + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo et per compositionem $5^{æ}$. $6^{æ}$. et hujus $11^{æ}$. proportionis, est curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut $s^2 \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2} \times TC^2 \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ divisa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $\overline{s^2 - tt} \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $\overline{s^2 - tt} \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibusque divisis per t t et inverso terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. e. i.

(s) *Quibus in æquatione scriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\, x^4 - 5082017.44\, x^3 + 148262.14\, x^2 - 12307251.44\, x + 88487.19 = 0$, sed cùm x debeat esse quantitas exigua, omnes terminos præter duos ultimos negligit, et ex æquatione $12307251.44\, x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(t) * *Est igitur distantia Lunæ a Terrâ*, &c. Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ a Terrâ incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quàm si incidat in tempus quadraturarum; clar. Halleius ex observationibus astronomicis deduxit, distantiam mediocrem Lunæ a Terrâ in syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod si vel tantillùm propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur, facilè accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem Lunæ.

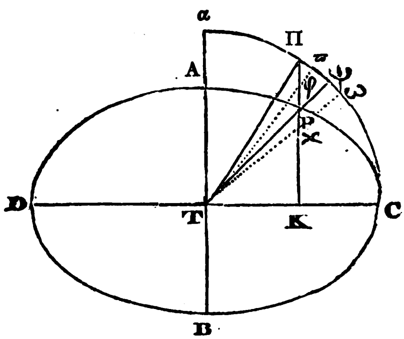
(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in ellipsi D B C A circa Terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, et radio T P ad Terram ducto describeret aream C T P tempori proportionalem: esset autem ellipseos semi-diameter maxima C T ad semi-diametrum minimam T A ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli C T P ad tangentem anguli motûs medii a quad-

(u) * *Oritur hæc inæqualitas,* &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum Terra spectat et cum gravitate Lunæ versus Terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis lunaris ad ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; motus autem Lunæ in tali ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum Terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur, ad id centrum diriguntur; cùmque areæ illæ ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro facto temporibus proportionales non esse, ideóque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo anguli in centro Terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus verus; et hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ et locum ejus verum, et hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ,* quam assumit *orbis lunaris* per Solis actionem, *oritur.*

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. et quâ fit ut ipsæ areæ a Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales; area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 112. determinare facillimum erit; quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, et bono assumptis, verùm vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem, respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent a viro summè accurato et perspicace.

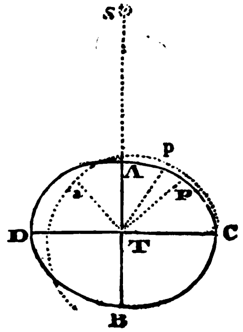
(x) * *Foret anguli tangens.* Sit C A D B ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentiâ moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area elliptica T C P erit tempori proportionalis, hoc est quod tota area elliptica erit ad eum sectorem T C P ut est tempus periodicum Lunæ ad tempus datum.

Est enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, sive totus circulus ad aream C T Π, ut tempus periodicum totum ad tempus datum ex constructione, sed ex notâ circuli et ellipseos proprietate, est tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, et pariter est sector

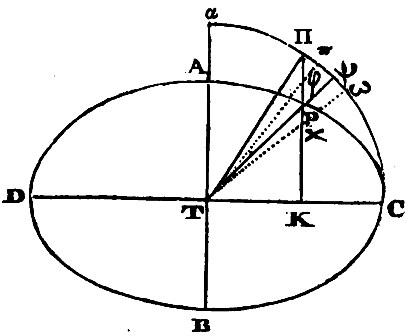


C T P ad C T Π ut T A ad C T (nam triangula rectilinea T P K, T Π K sunt ut bases P K, Π K; areæ curvilineæ C P K, C Π K sunt etiam, ex notâ ellipseos et circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti sectores C T P, C T Π sunt ut P K ad Π K, quæ sunt ut T A ad C T,) ergo tota area elliptica est ad aream circuli ut sector C T P ad C T Π, et alternando, tota area elliptica ad sectorem C T P, ut est circuli area ad C T Π, seu ut est tempus periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P sit tempori proportionalis, raturâ C computati, ut ellipseos semi-diameter T A ad ejusdem semi-diametrum T C seu 69 ad 70. (y) Debet autem descriptio areæ C T P, in progressu Lunæ a quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ Lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in quadraturâ sit ut quadratum sinus anguli C T P. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli C T P jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, et angulus C T P in octantibus, ubi motus medius est 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui subductus de angulo motûs medii 45gr. (z) relinquit variationem maximam 32′. 32″. Hæc



motus Lunæ qui a Terrâ videri debuisset sub angulo C T Π si Luna motu medio fuisset lata, videbitur sub angulo C T P, et si linea T K pro radio assumatur, erit K P tangens anguli C T P, et K Π tangens anguli C T Π, sed est P K ad Π K ut T A ad C T, ergo *tangens anguli C T P est ad tangentem anguli motûs medii ut T A ad T C seu 69 ad 70.*



(y) * *Debet autem descriptio areæ,* &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. et 113., exposita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{1+r}$ (per Cor. 2. not. 113.) sumatur ergo in arcu C Π versus C arcus $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{1+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 112. assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{1+r}$, ducatur ϖ T quæ secet lineam Π K in φ triangulum Π ϖ φ simile erit triangulo T K φ, sive propter exiguitatem anguli Π T ϖ triangulum Π ϖ φ simile erit triangulo T K Π, hinc erit T K ad T Π (r) sicut $\Pi\varpi \left(\frac{K\Pi \times TK}{1+r}\right)$ ad Π φ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{1+r}$, ideóque erit K φ $(=\Pi K - \Pi\varphi) = \frac{1+r \times \Pi K - r \times \Pi K}{1+r} = \frac{1 \times \Pi K}{1+r}$, unde habetur hæc proportio $1+r : 1 :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur T K pro radio, erit Π K tangens motûs medii et φ K tangens motûs medii imminuti hac variationis portione; debet minui in eadem ratione quam proxime tangens P K motus Lunæ in ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cùm itaque 1 + r, sit medium arithmeticum inter 1 + 2 r sive 11073 et 1 sive 10973, et ratio medii arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quàm medii geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur tangens P K ad tangentem anguli motûs veri Lunæ ut medium geometricum inter 11073 et 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877; cùm ergo sit Π K ad P K ut 70 ad 69, et cùm sit P K ad tangentem motûs Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68,6877, erit ex æquo tangens motûs medii ad tangentem motûs veri ut 70 ad 68,6877. Q. e. d.

(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ ita se haberent si Luna, pergendo a quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum C T A graduum tantum nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, prius quam Solem assequitur, describit angulum C T a angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d. 12^h. 44'.$ ad $27^d. 7^h. 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, et variatio maxima quæ secus esset $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ Solis a Terrâ, (a) neglectis differentiis quæ a curvaturâ orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam et novam quàm in gibbosam et plenam, oriri possint. (b) In aliis

pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ elliptica orbis lunaris, etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur T P in Ψ et cùm arcus $\Pi\Psi$ vix excedat semi-gradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit triangulus $\Pi\Psi P$ similis triangulo TKP, sive $TK\Pi$, ideóque est $T\Pi$ ad TK ut ΠP ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad ΠP, ideóque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ et arcus $\Pi\Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70\, T\Pi}$, jam autem demonstratum est notâ 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi\Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ ellipticâ orbis lunaris, est maxima in octantibus sicut et altera portio, ergo variatio tota est maxima in octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni oriri possint.* Hactenus suppositum est, lineam D T C repræsentare orbis magni portionem, et fieri quadraturas in punctis D et C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-diameter orbis lunaris sub angulo 10 circiter minutorum a Sole videtur, unde arcus D C est 20′ circiter et aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quàm oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam et novam quàm in gibbosam et plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam et falcatâm ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ et vis in Lunam plenam et gibbosam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem, erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA}|^2 \times \overline{ST+TA}|^2$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 5ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, et prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; verùm propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti.

(b) *In aliis distantiis Solis a Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primùm vis Solis mediocris mutatur inversè ut quadrata distantiarum, et præterea cùm Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior a Terrâ, Luna e converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis synodicus in perigæo Solis fit longior quàm idem mensis synodicus in apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $\Pi\Psi$ et $\Psi\omega$; et quidem in octantibus cùm triangulum $\Pi P \Psi$ sit rectangulum isosceles, est $\Pi\Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò $\Pi P = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli et ellipseos est αT ad AT ut ΠK ad PK et dividendo αT ad αA ut ΠK ad $\Pi P = \frac{\alpha A \times \Pi K}{\alpha T}$ sed in octante est $\Pi K = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi\Psi = \frac{\alpha A}{2}$, est autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium a suo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis synodicæ Lunæ, ergo si id tempus crescat manentibus iisdem viribus similiter agentibus, distantiis Solis a Terrâ, variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, et triplicatâ ratione distantiæ Solis a Terrâ inversè. (c) Ideóque in apogæo Solis variatio maxima est 33′. 14″, et in ejus peri-

effectus totus α A erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. 1. Lem. X. Lib. I. ideóque Π Ψ crescit secundùm quadrata temporum.

Idem demonstrabitur de portione variationis Ψ ω quæ pendet ex acceleratione descriptionis areæ; quippe manentibus omnibus ut in not. 112. et fig. 3ª. recta C A majus tempus designare censeatur, et partes P p tempuscula in eadem ratione longiora, lineæ P M designant velocitates genitas durante momento P p, si ergo id momentum crescat viribus generatricibus iisdem manentibus, velocitates genitæ P M crescent in proportione temporis, et quia P p M m designat spatiolum illâ velocitate percursum, crescuntque et P M et P p in ratione temporum, crescet P M m p in ratione duplicatâ temporum, cùmque singula elementa curvæ in eâ proportione crescant, et tota area C A H, et ei æqualis C A X Y, ejusque dimidia C Q Z Y in eâdem proportione crescent; ex quâ si detrahatur C Q Z quod in eâdem proportione crevit, reliquum C Z Y quod areæ variationi maximæ Ψ T ω est proportionale, crescet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio T ω, ipse arcus Ψ ω crescet in duplicatâ ratione temporum.

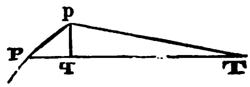
Hinc cùm Π Ψ crescat in duplicatâ ratione temporum, tum etiam Ψ ω, summa itaque Π ω sive tota variatio crescet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod si spectetur imminutio actionis Solis propter auctam distantiam, variatio maxima decrescet in ratione triplicatâ distantiarum, nam designetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, est ex constructione S K ad T M ut vis Solis sive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim T M, ergo ea vis T M est ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo T M quæ est æqualis P T; vis T M ex actione Solis pendens decrescit ut distantiarum cubus augetur; manente ergo tempore, sed vi mutatâ secundùm rationem triplicatam, eâdem ferè ratione ac prius ostendetur utramque variationis maximæ partem Π Ψ ω et Ψ ω fore inversè in ratione triplicatâ distantiarum Solis; *hincque in variis Solis a Terrâ distantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt, *variationes maximæ erunt inter se in ratione duplicatâ durationis mensis synodici eo tempore, et triplicatâ inversè distantiæ Solis a Terrâ.*

(c) * *Ideóque*, &c. Ex his et præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, si prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur m distantia mediocris Solis, sit $\pm$ e excessus vel defectus ejus distantiæ a mediocri distantiâ in loco quovis dato; denique dicatur s Solis motus horarius mediocris, dico quod Solis motus horarius in loco quovis suæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}|^2}$.

Sit enim T Terra; P Sol; T P p area horæ tempore descripta, ejus areæ valor ubivis erit semper idem, sit p q arcus radio T p descriptus,



qui ob exiguitatem sumi potest ut ipsum perpendiculum in basim P T demissum, ideóque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inversè ut basis T P, sed numerus graduum ejus arcus p q est directè ut is ipse arcus et inversè ut ejus radius T p sive T P, ergo numerus graduum ejus arcûs p q est in ratione duplicatâ inversâ radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, est inversè ut quadratum radii T P; cùm ergo in distantiâ mediocri est T P $=$ m, in quâvis aliâ distantiâ est T P $=$ m $\pm$ e, ergo est $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s\,m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis distantiâ T P.

In distantiâ mediocri evanescit quantitas $\pm$ e ideóque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ secundùm hypothesim.

2°. Posito Lunam semper moveri motu suo horario mediocri, qui dicatur l, sitque p ejus tempus periodicum inter fixas, duratio mensis synodici quovis in loco orbitæ Telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}|^2 \times l\,p}{\overline{m \pm e}|^2 l - m^2 s}$ sive divisâ hâc quantitate per constantem $\frac{l\,p}{m^2}$ fiet mensis synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{l - s \pm \frac{2\,l\,e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis mense synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur, erit 360 $+$ x, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}|^2}$ ut 360 $+$ x ad x, et dividendo $m^2 l \pm 2 m e l +$

gæo 37′. 11″, si modò excentricitas Solis sit ad orbis magni semi-diametrum transversam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hactenus variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantiâ a Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat a Terrâ quàm si locaretur in hoc orbe, variatio paulo major esse potest vel paulo minor quàm pro Regulâ hic allatâ: sed excessum vel defectum ab astrononiis per phænomena determinandum relinquo.

$e^2 l - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360\, m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Luna percurrat 360 gr. tempore p, absolvet 360 gr. $+ \frac{360\, m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 sp}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ sive reductione factâ, tempore $\frac{m^2 lp \pm 2melp + e^2 lp - m^2 sp + m^2 sp}{n^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ sive $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{lp}{m^2}$ quæ quantitas divisa per constantem $\frac{lp}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio mensis synodici in distantiâ quavis $m \pm e$. Q. e. d.

In distantiâ mediocri, evanescente quantitate $\pm e$ mensis synodicus erit $\frac{m^2 lp}{m^2 l - m^2 s} = \frac{lp}{1 - s}$ et erit ad menses synodicos in aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{1 - s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}|^2}{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$.

3. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{\overline{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$: **nam ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis synodici et inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}|^4}{\overline{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$ et $\frac{1}{\overline{m \pm e}|^3}$ ideóque ut $\frac{m \pm e}{\overline{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$.**

Corol. **In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{1 - s}|^2}$ et eam superius determinavit Newtonus ferè 35″. 10‴. sive 2110‴; hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{1 - s}|^2}$** ad $\frac{m \pm e}{\overline{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2}$ ita 2110‴. ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{1 - s}|^2}{\overline{1 - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}|^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110‴$, (sive accuratius $\times$ 2109.8‴.).

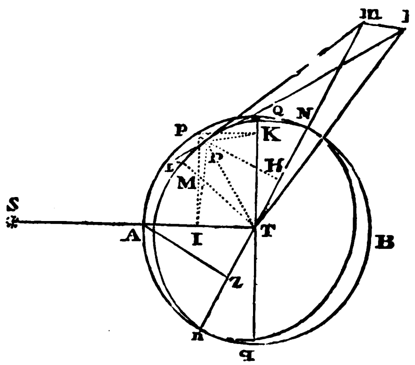
Ratio autem motûs horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cùm tempus periodicum Lunæ sit 27^d. 7^h. 43′. et annus sidereus Solis 365^d. 6^h. 9′. et velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora periodica, erit l ad s ut 1.081 ad .081 ideóque erit $l - s = 1$, et variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\, e}{m} + \frac{1.081\, e^2}{m^2}}|^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2109.8‴$. Cùmque m sit 1000 et in apogæo $\frac{m + e}{m}$ sit $1.016\frac{51}{16}$ in perigæo verò sit $\frac{m - e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴. efficiunt **in apogæo 2145.5‴. et in perigæo 2074‴, sed cùm sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\, e}{m}$ evadit .036618875 et $\frac{1.081\, e^2}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162\, e^2}{m} + \frac{1.081\, e^2}{m^2}$ fit 1.03665 et $1 - \frac{2.162\, e}{m} + \frac{1.081 e^2}{m^2}$ fit .9637.**

Dividatur ergo bis 2145′.5‴. per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in apogæo 1994‴. sive 33″. 14‴, et dividatur bis 2074‴. per .964 quotiens dabit variationem maximam in perigæo quàm proximè 2231‴. sive 37″. 11‴.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.

Designet S Solem, T Terram, P Lunam, N P n orbem Lunæ, N p n ([d]) vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos, n T N m lineam nodorum infinitè productam; P I, P K perpendicula demissa in lineas S T, Q q; P p perpendiculum demissum in planum eclipticæ; A, B syzygias Lunæ in plano eclipticæ; A Z perpendiculum in lineam nodorum N n; Q, q quadraturas Lunæ in plano eclipticæ, et p K perpendiculum in lineam Q q quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum (per Prop. XXV.) duplex est, altera lineæ L M in schemate Propositionis illius, altera lineæ M T proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, posteriore in Solem secundùm lineam rectæ



S T a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior L M agit secundùm planum orbis lunaris, et propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior M T quâ planum orbis lunaris perturbatur, ([e]) eadem est cum vi 3 P K vel 3 I T. ([f]) Et hæc vis (per Prop. XXV.) est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3 I T ad radium circuli multiplicatum per numerum 178.725, sive ut I T ad radium multiplicatum per 59.575. Cæterum in hoc calculo, et eo omni qui sequitur, considero lineas omnes a Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terrâ ad Solem ducitur, ([g]) propterea quod inclinatio tantùm ferè

([d]) * *Vestigium orbis in plano eclipticæ.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ lunaris perpendicula ad planum eclipticæ.

([e]) * *Eadem est cum vi 3 P K* (Prop. XXV. not. [u]).

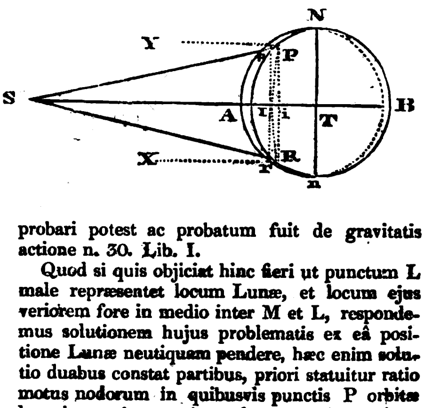
([f]) * *Et hæc vis est ad vim quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset.* Vis T M est ad vim M L ut est 3 P K sive 3 I T ad radium (Prop. XXVI. not. 1.); vis M L est ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo periodico revolvi posset, ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. [r]). Ergo, ex æquo, et conjunctis rationibus, est vis M T ad vim quâ Luna circa Terram tempore suo periodico revolvi posset ut est 3 I T ad radium circuli multiplicatum per 178.725.

([g]) * *Propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, specteturque Luna in punctis P et R æqualiter a quadraturis N et n distantibus et minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; et nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam P M arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo describit, et M L lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ 3 I T, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur P L, M P, et producantur eæ ad m et l, ubi secent planum eclipticæ; inque T m demittatur perpendiculum P H. Et quoniam recta M L parallela est plano eclipticæ; ideóque cum rectâ m l quæ in plano illo jacet concurrere non potest, et tamen jacent hæ rectæ in plano communi L M P m l; parallelæ erunt hæ rectæ, et propterea similia erunt triangula L M P, l m P. Jam cùm M P m sit in plano orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam N n per orbis illius nodos N, n ductam. Et quo-

vis obliqua Solis S P, S R in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam parallelam lineæ S T, secundùm directiones P Y, R X agentem, alteram huic perpendicularem secundùm directiones P I, R I; de effectu vis secundùm directiones P Y, R X agentis in hoc problemate actum est; directiones verò P I, R I sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis P I, R I in duas vires, unam P i, R i secundùm planum orbitæ lunaris agentem ideóque nodorum positionem non turbantem, alteram P p, R r ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet; sed cùm de plani inclinatione hinc non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis P p, R i dum admovet puncta P et R ad eclipticam, efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideóque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur, et actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideóque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi P Y parallela lineæ S T tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi R X.

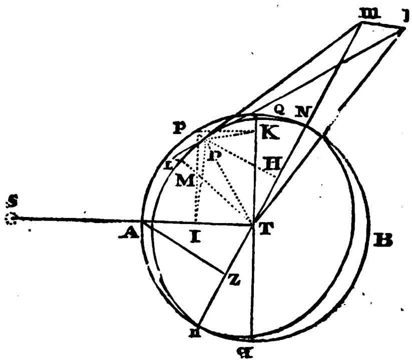
(h) * *Et M L lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi* 3 *I T* describeret tempore quo Luna arcum P M percurreret; assumit utique Newtonus, ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3 I T quæ exercitæ fuerunt dum arcus P M percurritur *simul et semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundùm tangentem, et ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3 I T agentem tempore æquali illi quo describitur arcus P M, ita ut Luna sequatur diagonalem parallelogrammi cujus unum latus sit P M, alterum verò parallelum et æquale lineæ L M; cùm autem vis 3 I T exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola P M, ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3 I T genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis P M genitam, et uniformem manentem toto tempore P M, quod eâdem ratione



probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, et locum ejus veriorem fore in medio inter M et L, respondemus solutionem hujus problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ lunaris, et hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota M L aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; in secundâ solutionis parte determinatur quantitas motûs nodorum in syzygiis ipsis, respectu motûs Lunæ in suâ orbitâ, et in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ L M, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3 I T ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari, cùm in medio inter L et M collocanda fuisset.

niam vis quâ dimidium lineolæ L M generatur, si tota simul et semel in loco P impressa esset, generaret lineam illam totam; et efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset L P, atque ideo transferret Lunam de plano M P m T in planum L P l T; motus angularis nodorum a vi illâ genitus, æqualis erit angulo m T l. Est autem m l ad m P ut M L ad M P, ideóque cùm M P ob datum tempus data sit, est m l ut rectangulum M L × m P, id est, (i) ut rectangulum I T × m P. Et angulus m T l, (k) si modo angulus T m l rectus sit, est ut $\frac{\text{m l}}{\text{T m}}$, et propterea ut



$\frac{\text{I T} \times \text{P m}}{\text{T m}}$, id est (ob proportionales T m et m P, T P et P H) ut $\frac{\text{I T} \times \text{P H}}{\text{T P}}$, ideóque ob datam T P, ut I T × P H. Quod si angulus T m l, seu S T N obliquus sit, (l) erit angulus m T l adhuc minor, in ratione sinus anguli S T N ad radium, seu A Z ad A T. Est igitur velocitas nodorum ut I T × P H × A Z, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum T P I, P T N et S T N.

Si anguli illi, nodis in quadraturis et Lunâ in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola m l abibit in infinitum, et angulus m T l evadet angulo

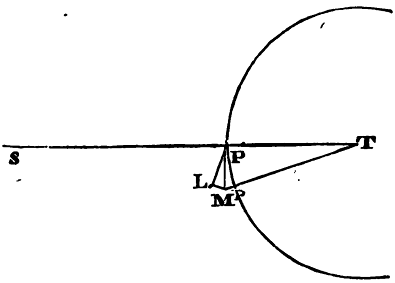
(i) * *Ut rectangulum I T × m P.* Linea M L est duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3 I T percurritur, vis illa 3 I T dato illo tempore uniformis manere censetur, itaque in diversis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3 I T percursæ sunt ut illæ vires 3 I T, sive ut I T, ergo M L ejus viæ duplum est etiam ut I T, et M L × m P est ut I T × m P.

(k) * *Si modo angulus T m l sit rectus,* cùm angulus m T l sit admodum exiguus, si angulus T m l sit rectus, usurpari poterit recta m l pro arcu circuli cujus radius est T m ideóque (154. Lib. I.) angulus m T l, est ut $\frac{\text{m l}}{\text{T m}}$.

(l) * *Erit angulus m T l, in ratione sinus anguli S T N ad radium;* in triangulo T m l, est sinus anguli m T l ad sinum anguli T m l ut latus m l ad latus T l; sed propter exiguitatem lateris m l respectu lateris T l, ratio m l ad T l eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus T m l, manentibus lineis m l et T m; in angulo enim maximo linea T l evadit T m + m l, in minimo T m — m l, est verò m l quantitas evanescens respectu T m, hinc illius incrementi aut decrementi m l ratio nulla est habenda. Itaque manente quantitate m l qualiscumque sit angulus T m l, ratio m l ad T l eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli m T l ad sinum anguli T m l, sive etiam, cùm anguli minimi sint ut eorum sinus, anguli m T l in variâ inclinatione lineæ datæ m l ad lineam datam T m sunt inter se ut sinus angulorum T m l, est ergo angulus m T l, in quâvis magnitudine anguli T m l ad eum angulum m T l quando angulus T m l est rectus ut sinus anguli T m (vel, ut sinus anguli I T n ipsi æqualis ob parallelas S T, m l) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli S T N qui idem est cum sinu anguli S T n ad radium. Q. e. o.

m P l æqualis. Hoc autem in casu, angulus m P l est ad angulum P T M, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit, ut 1 ad 59, 575. Nam angulus m P l æqualis est angulo L P M, id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata solaris 3 I T, si tum cessaret Lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; (m) et angulus P T M æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris 3 I T, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59, 575. (n) Ergo cùm motus medius horarius Lunæ respectu fixarum sit $32'. 56''. 27'''. 12\frac{1}{2}^{iv}$, motus horarius nodi in hoc casu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. ut contentum sub sinubus angulorum trium T P I, P T N, et S T N (seu distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole) ad cubum radii. (o) Et quo-

(m) * *Et angulus P T M æqualis est angulo deflexionis.* Angulus M P p est angulus deflexionis de quo nunc agitur, triangula verò



M P p, M P T sunt similia ob angulum communem P M T, et angulos rectos T P M et P p M, hinc anguli residui P T M, M P p sunt æquales.

(n) * *Ergo*, &c. Isti anguli deflexionis debent esse ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim casu, utraque vis agit perpendiculariter ad tangentem P M, hinc lineolæ M p, M L per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur tangentis portio P M, debent esse ut ipsæ illæ vires; eæ verò lineolæ sumpto P M pro radio sunt tangentes angulorum deflexionis p P M, M P L, et anguli quàm minimi sunt ut ipsorum tangentes, ergo anguli illi deflexionis sunt ut vires illas producentes, motus autem horarii Lunæ et nodorum sunt ipsi anguli P T M et m T l, qui sunt ex demonstratis æquales angulis deflexionum M P p, M P L, ergo motus horarii sunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. e. o.

(o) * *Et quoties signum alicujus anguli de affirmativo*, &c. Angulos Q T P et N T P, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est angulus Q T P est positivus quoties arcus Q P, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180 gr. negativus verò cùm arcus Q P excedit 180 gr.; angulus N T P pariter est positivus cùm arcus N P a nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180 gr. negativus verò est cùm is arcus N P excedit 180 gr. Quando enim arcus Q P, N P excedunt 180 gr. tunc anguli Q T P, N T P non amplius numerantur secundùm Lunæ directionem, seu secundùm viam quam Luna est emensa, sed secundùm viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q et N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundùm viam a Lunâ descriptam mensurantur.

Angulus verò S T N positivus dicitur quando arcus A N a loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180 gr., negativus verò dicitur cùm excedit 180 gr., quia, cùm nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus S T N primo casu exprimit viam nodi a syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod si tres illi anguli Q T P, N T P, S T N, sint positivi motus nodorum est regressivus: 2°. quod si unus eorum sit negativus, reliqui positivi, motus nodorum est progressivus. 3°. Quod si unus eorum sit positivus, duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4°. Denique quod si omnes sint negativi, motus nodorum iterum sit progressivus, sic enim *quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum, deque affirmativo in negativum mu-*

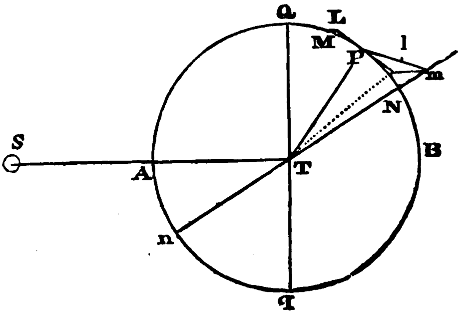
ties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties Luna inter quadraturam alterutram et nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, et per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

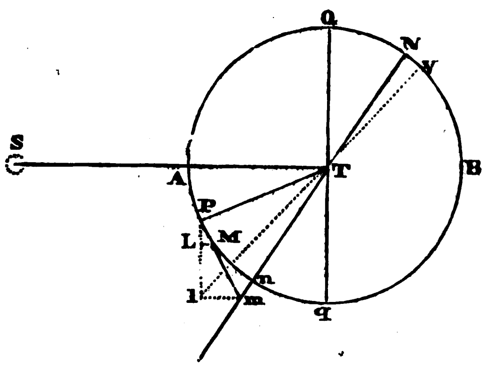
tatur, debebit motus regressivus in progressivum et progressivus in regressivum mutari.

Art. 1. Si tres anguli sint positivi, nodorum motus erit regressivus.

In hoc casu, arcus A N contra ordinem signorum sumptus non excedit semi-circulum, ideóque punctum N erit in semi-circulo A Q B; præterea arcus Q P secundùm ordinem signorum sumptus, 180 gr. non excedit, erit itaque punctum P in semi-circulo Q A q; denique arcus N P semi-circulo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit N P quadrante minor ut in figurâ textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce proportionis constructione liquet quod ductâ M L quæ exprimit actionem Solis, productâ M P quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ L P quæ occurrit plano eclipticæ in l, ita ut m l sit parallela lineæ M L, cùm L sit versus Solem respectu puncti M et lineæ M P m, L P l sese decussent, punctum l erit remotius a Sole quàm punctum m, ideóque angulus A T l major erit quàm angulus A T m, ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est, ejus motus est regressivus.

Sit N P quadrante major, tum lineæ P M, P L non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ T N concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione T n, et quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quàm punctum m; et angulus A T l minor erit angulo A T m, ideóque productâ lineâ l T in V, angulus A T V complementum ad duos rectos anguli A T l, major erit angulo A T N complemento ad duos rectos anguli A T m, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint positivi, motus nodi est regressivus.

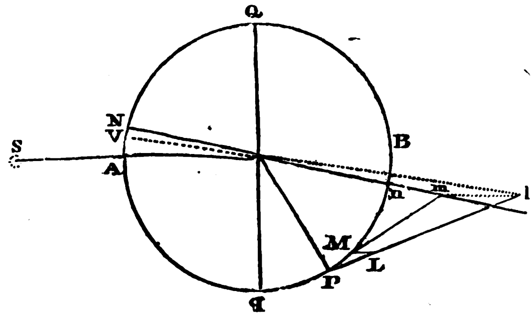




Art. 2. Mutetur horum angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis, motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.

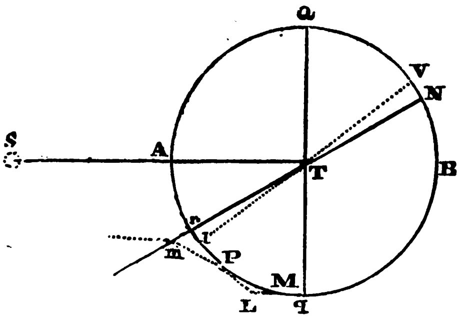
Cas. 2. Fiat angulus Q T P negativus, hoc est, punctum P sit in semi-circulo Q B q, manente positivo angulo S T N ita ut N sit in semi-circulo A Q B, et pariter manente positivo angulo N T P; observandum quod lineola M L in semi-circulo Q B q positionem habet oppositam illi quam habebat in semi-circulo Q A q ut constat ex Prop. LXVI. Lib. I. ita ut punctum L sit a Sole remotius quàm punctum M; itaque si P N sit minor quadrante, lineæ L P retroproducendæ erunt, et punctum l erit propius Soli quàm punctum m; ideóque angulus A T l minor erit angulo A T m, ergo (cùm diminuatur angulus A T N qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundùm ordinem signorum est promotus, ejusque motus progressivus est.

Si verò N P sit major quadrante antrorsum productis lineis P M, P L punctum l manebit remotius a Sole quàm punctum m, ideóque



angulus A T l major erit angulo A T m, productâ itaque l T in V, angulus l T V anguli A T l complementum minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit, itaque motus nodi est ut prius progressivus.

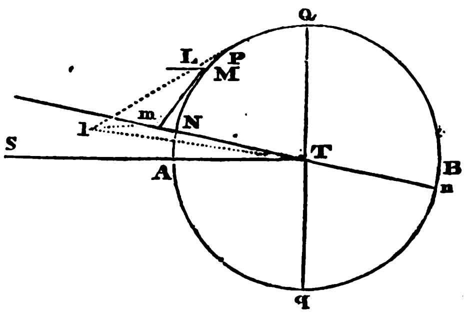
Cas. 2. Sit angulus N T P negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit verò Q T P positivus, hoc est sit punctum P in semi-circulo Q A q et pariter sit



S T N positivus, ita ut N sit in semicirculo A Q B, si N P (secundùm consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit a puncto n minus quadrante, ideóque retroproductis lineis M P, L P in m et l, cùm L sit Soli propius quàm M, erit l a Sole remotius quàm m, ideóque angulus A T l major erit angulo A T n, et angulus A T V prioris complementum minor erit angulo A T N qui est anguli A T m complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

Si N P sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante a puncto N distabit, cùmque N sit in consequentia respectu puncti P ut et puncta M et L antrorsum producendæ sunt lineæ P M, P L ut plano eclipticæ occurrant in m et l, et cùm L sit Soli vicinius quàm M, pariter l erit Soli vicinius quàm m, hinc angulus A T l minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N versus A processit, et motus nodi est progressivus.

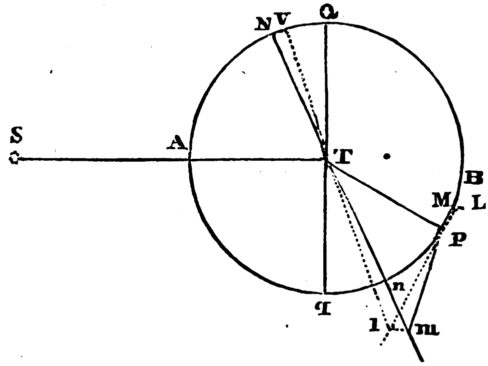
Cas. 3. Sit angulus S T N negativus positivo existentibus angulis Q T P, N T P. Sit N P minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ P M, P L ideóque l erit remotior a Sole quàm m, et angulus A T l major erit quàm A T m, vel A T N, cùm ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus S T N est negativus, punctum l magis adhuc in consequentiâ processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit N P major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ P M, P L ut cum ecliptica concurrant, a parte nodi n, ideóque L erit propius Soli quàm m, et angulus A T l minor erit angulo A T n; ideóque angulus A T V major



erit quàm A T N, ergo processit nodus ex N in V, secundùm consequentia.

Art. 3. Sint duo ex tribus angulis Q T P, N T P, S T N negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

Casus 1. Sint Q T P et N T P negativi, solus S T N sit positivus, distet P a nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante a puncto n, idque in consequentia, retroproducendæ erunt lineæ P M, P L, ut P M lineæ nodorum occurrat in m, et L P in l vicinius Soli, hinc A T l minor erit A T m et ideo A T V major quàm A T N, sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ P M, P L ut occurrant lineæ nodorum et l manebit a Sole remotius quàm m, et angulus A T l major erit angulo A T N, regreditur ergo nodus.



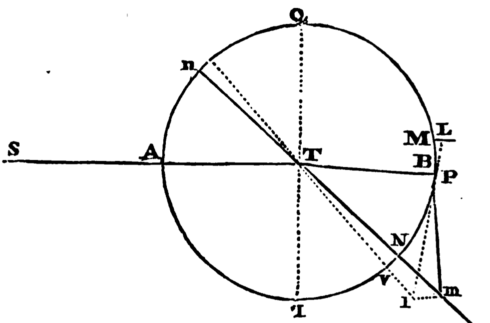
Cas. 2. Sint Q T P et S T N negativi, solus verò N T P positivus, sit N P minor quadrante, retroproductis lineis, cùm L sit remotius a Sole quàm M, erit l ob decussationem linearum propius Soli et angulus A T l sive A T V minor angulo A T N, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, et arcus A Q P V major erit arcu A Q P N, ergo nodus regreditur.

Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent eclipticæ a parte puncti n, et propter angulum Q T P negativum cùm P sit in semi-circulo q B Q erit l ut et L remotius a Sole quàm m et M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l et complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

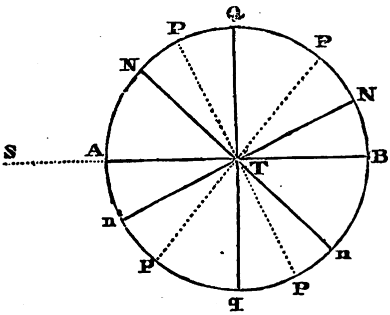
Cas. 3. Sint S T N et N T P negativi, Q T P verò positivus, punctum L est ubivis propius Soli quàm M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N, retroproducendæ sunt lineæ P M, P L, a parte puncti n et erit A T l majus quàm A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semi-circulo superiori A Q B, et n est in antecedentia respectu A, ideóque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus, sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius Soli quàm m, et A T l sive A T V minor quàm A T N, sed quia A T N est negativus, ideóque A est in antecedentia respectu puncti N, erit etiam V in antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi, motus ex regressivo progressivus fiet; ut hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N et Luna P sit in quadrante q B; nam cùm angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semi-circulo q B Q; cùm S T N sit negativus, N debet esse in semi-circulo A q B, et cùm N T P sit negativus, N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut eclipticæ occurrant, erit l remotius a Sole quàm m, et angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum et quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ a nodo distantia quadrante major non sit.



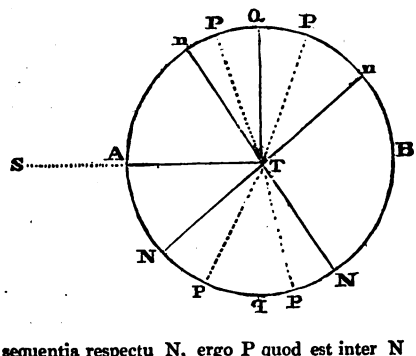
Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q et N vel q et n ex hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus, alter negativus; nam sit N vel n in semi-circulo Q B q, tum quia P est inter Q vel q et N vel n, erit P in eodem semi-circulo Q B q, ideóque angulus Q T P erit negativus, sed angulus N T P erit positivus, nam quia P est inter N et Q aut q et n, et Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, et pariter dum n versatur in semi-circulo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q et arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus N P singuli minores erunt arcu N n sive minores semi-cir-



culo, ergo utroque casu angulus N T P erit positivus.

Manente A T N positivo sint N vel n in semi-circulo Q A q, tum quia P est inter Q et N aut n et q, erit etiam P in semi-circulo Q A q, ideóque angulus Q T P erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q et N positum erit in antecedentia respectu N; et in casu quo P foret inter n et q quia q est in hac hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideóque plus semi-circulo a puncto N distaret, utroque ergo casu angulus N T P negativus foret.

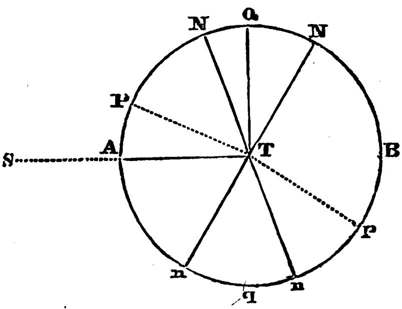
Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, et Lunâ P inter N et q vel n et Q, liquet angulum Q T P fore positivum, quia est P in semi-circulo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in con-



sequentia respectu N, ergo P quod est inter N et q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cùm n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus N T P est positivus.

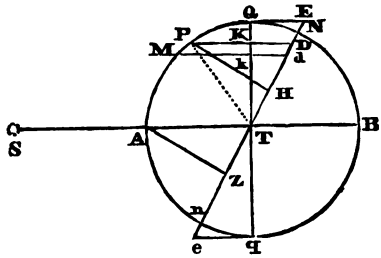
Itaque si angulus A T N sive S T N sit positivus, ubivis sit N in semi-circulo A Q B et si angulus S T N sit negativus, sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter nodum utrumvis N vel n, et quadraturam proximam, unus e tribus angulis duntaxat erit negativus, duo reliqui erunt positivi, itaque per Articulum 2. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo S T N negativo, et N in quadrante q B vel n in quadrante B Q, Luna verò posita inter utrumvis nodum et quadraturam proximam, reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt, liquet enim facilè punctum P in hâc hypothesi versari in semi-circulo q B Q ideóque angulum Q T P esse negativum; præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, et quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideóque punctum N plus semi-circulo a puncto P distabit, itaque sive sit P inter q et N, sive inter n et Q in semi-circulo q B Q, tres anguli erunt negativi, sed per Art. 4. eo casus motus nodi est progressivus; ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum et quadraturam proximam, nodi progrediuntur.



In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi, et tertius positivus, motus nodi regressivus est per Art. 1. et 3., alterutrum autem evenire necesse est cùm P non est inter nodum et quadraturam proximam; hoc enim posito, sit, ut prius, angulus S T N positivus, et N in quadrante Q T A, et P ubivis inter N et remotiorem quadraturam q, vel inter n et remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N et q, angulus Q T P est positivus, siquidem P est in semi-circulo Q A q, et quia N est nunc inter P et Q, et N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus N T P est positivus; si P sit inter n et Q, angulus Q T P est negativus, sed et pariter angulus N T P, nam cùm P sit in consequentia respectu n, plus semi-circulo a puncto N distabit.

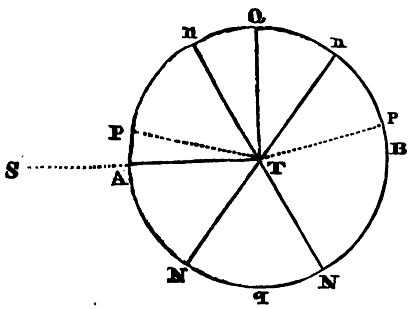
Corol. 1. Hinc si a dati arcûs quàm minimi P M terminis P et M ad lineam quadraturas jungentem Q q demittantur perpendicula P K, M k, eademque producantur donec secent lineam nodorum N n in D et d; erit motus horarius nodorum ut area M P D d et quadratum lineæ A Z conjunctim. Sunto enim P K, P H et A Z prædicti tres sinus. Nempe P K sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, P H sinus distantiæ Lunæ a nodo, et A Z sinus distantiæ nodi a Sole: et erit velocitas nodi ut



contentum P K × P H × A Z. (p) Est autem P T ad P K ut P M ad K k, ideóque ob datas P T et P M est K k ipsi P K proportionalis. Est et A T ad P D ut A Z ad P H, et propterea P H rectangulo P D × A Z proportionalis, et conjunctis rationibus P K × P H est ut con-

Sit N ubivis in quadrante B T Q, et P inter Q et n vel inter q et N primo casu omnes angulos fore positivos, altero angulos Q T P et N T P fore negativos, ut in præcedenti, demonstrabitur.

Denique angulus S T N sit negativus, et P non sit inter quadraturam et nodum, sed alibi ubivis, alteruter ex angulis Q T P, N T P positivus erit, negativus alter; sit N in quadrante A T q et P in arcu Q A N (quadrante major) erit Q T P positivus et N T P negativus, siqui-



dem P est in antecedentia respectu N, sit P in arcu q B n erit Q T P negativus, sed N T P positivus, nam arcus N P in consequentia sumptus semi-circulo minor erit.

Sit N in quadrante q T B, si P sit in arcu n q, angulus Q T P positivus est, sed angulus N T P negativus, quia arcus N n + n P semicirculo major est, si P sit in arcu N Q angulus Q T P est quidem negativus, sed quia P est in consequentia respectu N minusque semi-circulo distat, ergo angulus N T P est positivus; hinc ubivis sit P, si modo non sit inter nodum et quadraturam proximam, vel omnes anguli erunt positivi, vel duo simul negativi, alter verò positivus.

Cùm ergo arcus inter N vel n et quadraturam proximam, nunquam excedat quadrantem, eoque sit sæpe minor; e contra verò, arcus inter N vel n et quadraturam remotiorem nunquam sit minor quadrante et sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, nodi regrediuntur et per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum algebraicorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cùm angulus ad semi-circulum crevit et maximus sit, mox negativus evadit, quod sane non evenisset si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; juvant algebraicæ illæ consequentiæ, in retegendis promptè Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ algebraicæ consequentiæ, velut ad Lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere.

(p) * *Est autem P T ad P K ut P M ad K k* ex notissimâ circuli proprietate radium esse ad ordinatam, ut est fluxio arcûs ad fluxionem abscissæ.

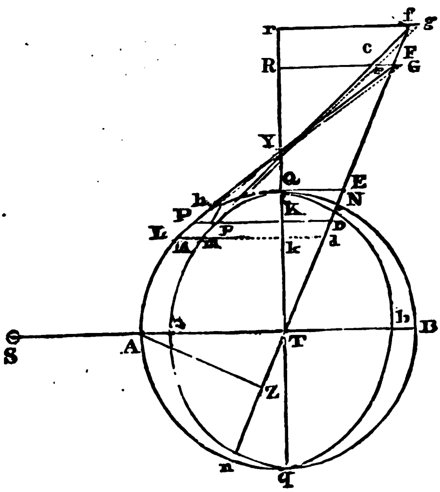
tentum K k × P D × A Z, et P K × P H × A Z ut K k × P D × A Z qu. id est, ut area P D d M et A Z qu. conjunctim. Q. e. d.

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motûs horarii in syzygiis Lunæ, ideóque est ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut quadratum sinus distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii, sive ut A Z qu. ad A T qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semi-circulum Q A q, summa omnium arearum P D d M, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area Q M d E quæ ad circuli tangentem Q E terminatur; et quo tempore Luna attingit punctum n summa illa erit area tota E Q A n quam linea P D describit, dein Lunâ pergente ab n ad q, linea P D cadet extra circulum, et aream n q e ad circuli tangentem q e terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de areâ priore, et cùm æqualis sit areæ Q E N, relinquet semi-circulum N Q A n. Igitur summa omnium arearum P D d M, quo tempore Luna semi-circulum describit, est area semi-circuli; et summa omnium quo tempore Luna circulum describit, est area circuli totius. At area P D d M, ubi Luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu P M et radio P T; et summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ et radio circuli; et hoc rectangulum, cùm sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm reverâ describunt; et propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motûs quem habent in syzygiis Lunæ. Unde cùm motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. (q) Et cùm motus horarius nodorum semper sit ut A Z qu. et area P D d M conjunctim, et propterea motus horarius nodorum in syzygiis Lunæ ut A Z qu. et area P D d M conjunctim, id est (ob datam aream P D d M in syzygiis descriptam) ut A Z qu. atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut A Z qu. ad A T qu. Q. e. d.

(q) * *Et cùm motus horarius nodorum sit,* &c. per Corollarium præcedentem.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico. (r)



Designet Q p m a q ellipsin, axe majore Q q, minore a b descriptam, Q A q B circulum circumscriptum, T Terram in utriusque centro communi, S Solem, p Lunam in ellipsi motam, et p m arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, N et n nodos lineâ N n junctos, p K et m k perpendicula in axem Q q demissa et hinc inde producta, donec occurrant circulo in P et M, et lineæ nodorum in D et d. (s) Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area p D d m et A Z q conjunctim.

(r) * *In orbe elliptico*, illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

(s) * *Et si Luna radio ad Terram ducto describat aream tempori proportionalem*, &c. Liquet ex Prop. XXVIII. Lunam hanc ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc hypothesis ad solutionem hujus Problematis erit necessaria; ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantum obtineret si hæc ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; notum enim est areas ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales esse arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verùm hæc falsa hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Corollarium adjicitur.

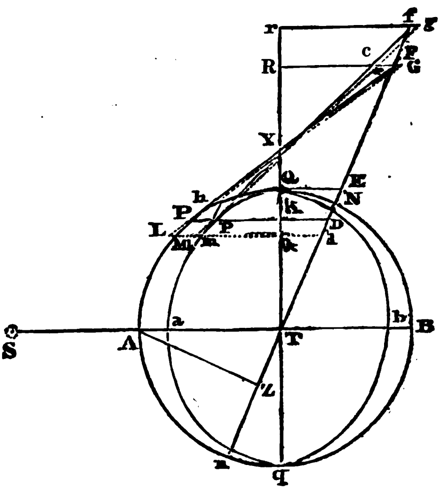
(t) * *Conveniant autem hæ tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servent, et in summo ordinatarum correspondentium ducantur tangentes, illæ tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; nam cùm ordinatæ datam rationem servent (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eamdem etiam servent rationem, ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utrâque curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem; ergo in hâc hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utrâque curvâ, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ducta in eodem puncto axem attingunt quando utriusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: notum autem est, ex not. 247. Lib. I. quod si circulus describatur super axem ellipseos, ordinatæ circuli et ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circulo et ellipsi ad alterum axem, sive esse P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo tangentes in punctis P et p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y.

Nam si P F tangat circulum in P, et producta occurrat T N in F et p f tangat ellipsin in p et producta occurrat eidem T N in f, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe T Q ad Y; et si M L designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum P M, urgente et impellente vi prædictâ 3 I T, seu 3 P K motu transverso describere posset, et m l designet spatium quod Luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3 I T seu 3 p K, describere posset, et producantur L P et l p donec occurrant plano eclipticæ in G et g; et jungantur F G et f g, quarum F G producta secet p f, p g et T Q in c, e et R respectivè, et f g producta secet T Q in r. Quoniam vis 3 I T seu 3 P K in circulo est ad vim 3 I T seu 3 p K in ellipsi, ut P K ad p K, seu A T ad a T; erit spatium M L vi priore genitum, ad spatium m l vi posteriore genitum, ut P K ad p K, id est, ob similes figuras P Y K p et F Y R c, ut F R ad c R. Est autem M L ad F G (ob similia triangula P L M, P G F) ut P L ad P G, hoc est (ob parallelas L k, P K, G L) ut p l ad p e, id est (ob similia triangula p l m, c p e) ut l m ad c e; et inversè ut L M est ad l m, seu F R ad c R, ita est F G ad c e. Et propterea si f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, ut f r ad c R (hoc est, ut f r ad F R et F R ad c R conjunctim, id est, ut f T ad F T et F G ad c e conjunctim) quoniam ratio F G ad c e utrinque ablata relinquit rationes f g ad F G et f T ad F T, foret f g ad F G ut f T ad F T; (u) atque ideo anguli, quos F G et f g subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus nodorum; quo tempore Luna in circulo arcum P M, in ellipsi arcum p m percurrit: et propterea motus nodorum in circulo et ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modò f g esset ad c e ut f Y ad c Y, id est, si f g æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula f g p, c e p, est f g ad c e ut f p ad c p; ideóque f g æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; (x) et propterea angulus, quem f g reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem F G subtendit, hoc est, motus nodorum

(u) * *Atque ideo anguli quos F G et f g subtenderent ad Terram T æquarentur inter se*, nam cùm lineæ F G et f g sint inter se parallelæ et proportionales lineis T F, T f, recta T G producta transibit etiam per g, ideóque per eundem angulum videbuntur lineæ F G et f g ex Terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem f g reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc f g ad priorem f g*. Cùm enim linea f g sit minima, respectu lineæ T g linea T g eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ f g hic assumptâ; sed in triangulo utroque T f g. Sinus anguli f est ad lineam T g, ut sinus anguli f T g ad lineam f g; ergo cùm maneat angulus f, et linea T g, ratio sinus anguli f T g ad lineam f g erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem f g reverâ subtendit ad angulum quem ficta f g subtendebat, ut vera f g ad fictam f g.

in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc f g seu $\frac{c\,e \times f\,p}{c\,p}$ ad priorem f g seu $\frac{c\,e \times f\,Y}{c\,Y}$, id est, ut f p × c Y ad f Y × c p, seu f p ad f Y et c Y ad c p, hoc est, si p h ipsi T N parallela occurrat F P in h, ut F h ad F Y et F Y ad F P; hoc est, ut F h ad F P seu D p ad D P, (y) ideóque ut area D p m d ad aream D P M d. Et propterea, cùm (per Corol. 1. Prop. XXX.) area posterior et A Z q conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior et A Z q conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. Q. e. d.



Corol. Quare cùm, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum p D d m, quo tempore Luna pergit a quadratura ad locum quemvis m, sit area m p Q E d, quæ ad ellipseos tangentem Q E terminatur; et summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut T a ad T A, seu 69 ad 70. Et propterea, cùm (per Corol. 2. Prop. XXX.) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad $16''. 53'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut A Z qu. ad A T qu. si capiatur angulus $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ut A Z q ad A T q; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi a Sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quàm in quadraturis, et eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; et unà cum tempore motus nodorum

(y) * *Ideóque ut area D p m d ad aream D P M d* nempe propter communem altitudinem K k, nam trapezia p D d l, P D d L, pro parallelogrammis assumi possunt, quæ sunt ut bases D p, D P, et altitudines K k conjunctim.

(z) * *Cæterum Luna,* &c. Hæc omnia ex Prop. XXVI. hujusce deducuntur.

augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, et propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semi-summa 11023 ad eorundem semi-differentiam 50. Unde cùm tempus Lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. ([a]) Pergendo autem a quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturis quam proximè; et propterea differentia inter momentum in loco quocunque et momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturis et quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii, et incrementum temporis in locis singulis inter octantes et quadraturas, et decrementum ejus inter octantes et syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. ([b]) Est enim motus iste, dum Luna percurrit P M (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis. ([c]) Quare motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; ([d]) estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut

([a]) * *Pergendo autem a quadraturis.* Vide not. ([r]) Prop. XXVI. et locum ad quem refertur.

([b]) * *Est enim motus iste (cæteris paribus) ut M L, et M L est in duplicatâ ratione temporis,* motus nodorum generatur per actionem vis solaris 3 I T quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus P M, hinc crescit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expressit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipso P, a Sole simul et semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M describitur ab ipso exercita fuisset, et lineam L M esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus P M percurritur, describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. et 30. Lib. I.) hæc autem linea L M est proportionalis vero effectui actionis Solis (vid. not. ([h]) Prop. XXX. hujusce).

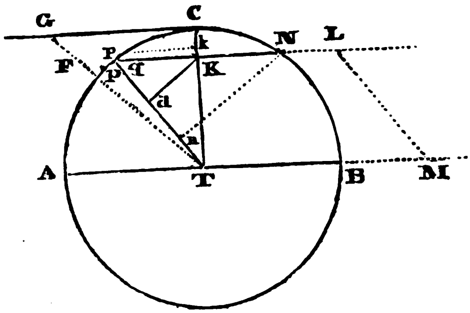
([c]) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M describet in syzygiis, est ad tempus quo eos arcus P M describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 et 11073.

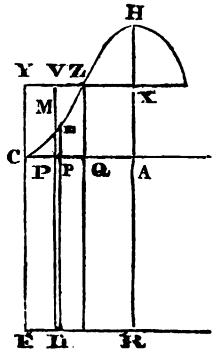
([d]) * *Estque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad modum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus est ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ sive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2 - 2 \times 50 \times 11073 + \overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim respectu evanescit, fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2 - 2 \times 50 \times 11073$ ad $\overline{11073}^2$, et dividendo per 11073, ut $11073 - 2 \times 50$ ad 11073.

Est ergo differentia motûs reliqui et motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideóque etiam est motûs decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes et syzygias, et incrementum in locis inter octantes et quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis, et differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. (f) Unde si nodi in quadraturis versentur, et capiantur loca

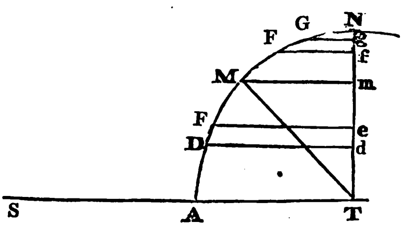
(e) * *Decrementum inter octantes et syzygias et incrementum inter octantes et quadraturas est quam proximè*, &c. Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet C P distantiam Lunæ a quadraturâ, linea I M exprimet decrementum motus nodorum est ut motus nodorum qualis inventus fuerat, et differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissem quadrati radii conjunctim: in syzygiis quadratum sinus distantiæ Lunæ a quadra





ejus velocitatem et I V exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus P M hâc velocitate I M, est ad tempus quo velocitate mediocri I V describeretur, ut I V ad I M, ideóque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}|^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ et neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per I V ut I V ad $IV \pm 2VM$; et convertendo, differentia motûs veri nodorum et motûs inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut decrementum motûs nodorum est semper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat, ducto in 2 V M et diviso per $IV \pm 2VM$, ideóque cùm $IV \pm 2VM$ pro constanti assumi possit quia 2 V M ferè evanescit respectu quantitatis I V, est illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat et V M conjunctim; est verò V M differentia inter Z Q et P M, et sunt Z Q et M P ut quadrata sinuum arcuum C Q et C P, arcus verò C Q est 45 gr. ex demonstratis ad Prop. XXVI. et quadratum ejus sinus est semissis quadrati radii; C P verò est distantia Lunæ a quadraturâ; ergo, incrementum aut tura est ipsum quadratum radii, unde differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis quadrati radii, est in hoc casu ipse semissis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in syzygiis ut sunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in syzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) et ut differentiæ quadratorum sinuum distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis quadrati radii ad eum semissem quadrati radii conjunctim. Q. e. o.

(f) * *Unde si nodi*, &c. Versentur nodi in quadraturis, capiantur loca F et E ab octante



M hinc inde æqualiter distantia, et alia duo D et G a syzygiâ A et quadraturâ N distantia duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, et alia duo a syzygiâ et quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam et octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem et quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem ineunti facilè constabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygia.

intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, et eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementa motûs nodorum in punctis E et D et ex summâ eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G et F, et residuum erit ipsum decrementum in syzygia A.

Etenim, per præcedentia, decrementa sive incrementa sunt ut motus totus nodorum et differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum ut contentum sub sinubus distantiarum Lunæ a quadraturâ, Lunæ a nodo, et nodi a Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantiæ nodi a Sole in hoc casu est ipse radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ a nodo eadem est ac distantia Lunæ a quadraturâ, cùm nodi sint in quadraturis; ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, et decrementa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ et sub differentiâ ejusdem quadrati et semissis radii.

Dicatur itaque radius r, sinus arcus N G dicatur s. erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \overline{\tfrac{1}{2}rr - ss}$ sive $\tfrac{1}{2}r^2s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est s, et N F + F M est æqualis octanti cujus sinus est $r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et per principia trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentiæ factorum sinûs majoris arcus per cosinum minoris et sinus minoris arcus per cosinum majoris, divisæ per radium, hinc sinus arcus F N est æqualis $\frac{r\sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \sqrt{\overline{rr - ss}} - sr\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{r} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \sqrt{\overline{rr - ss}} - s\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\tfrac{1}{2} \times \overline{rr - ss - s\sqrt{\overline{rr - ss}} + \frac{ss}{2}} \times \overline{\tfrac{1}{2}rr - \tfrac{1}{2}\overline{rr - ss} + s\sqrt{\overline{rr - ss}} - \frac{ss}{2}}$ sive deletis terminis æqualibus et oppositis $\overline{\tfrac{1}{2}rr - s\sqrt{\overline{rr - ss}}} \times s\sqrt{\overline{rr - ss}}$, et multiplicatione factâ $\tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} - r^2s^2 + s^4$. Ideóque summa incrementorum in G et F est $\tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} - \tfrac{1}{2}r^2s^2$.

Sinus autem in E et D sunt cosinus arcuum F et G, ergo quadratum sinus arcus N E est $rr - \tfrac{1}{2} \times \overline{rr - ss + s\sqrt{\overline{rr - ss}}} - \tfrac{1}{2}ss = \tfrac{1}{2}rr + s\sqrt{\overline{rr - ss}}$; ideóque decrementum motus nodorum in E est $\overline{\tfrac{1}{2}rr + s \times \sqrt{\overline{rr - ss}}} \times \overline{(\tfrac{1}{2}rr + s\sqrt{\overline{rr - ss}}) - \tfrac{1}{2}rr} = \tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} + r^2ss - s^4$.

Quadratum sinus arcus N D est $rr - ss$, ideóque decrementum motus nodorum in D est $\overline{rr - ss} \times \overline{rr - ss - \tfrac{1}{2}rr} = \tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{3}{2}r^2s^2 + s^4$; sicque summa decrementorum est $\tfrac{1}{2}r^4 + \tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} - \tfrac{1}{2}r^2s^2$.

Denique in ipsâ syzygiâ quadratum sinus arcus N D est r r ideóque decrementum motus nodorum in syzygia est $r^2 \times \overline{r^2 - \tfrac{1}{2}r^2} = \tfrac{1}{2}r^4$.

Si ergo ex summâ decrementorum quæ inventa est $\tfrac{1}{2}r^4 + \tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} - \tfrac{1}{2}r^2s^2$ detrahatur summa incrementorum quæ inventa est $\tfrac{1}{2}r^2s\sqrt{\overline{rr - ss}} - \tfrac{1}{2}r^2s^2$ decrementorum residuum est ipsum $\tfrac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in syzygia exprimet. Q. e. d.

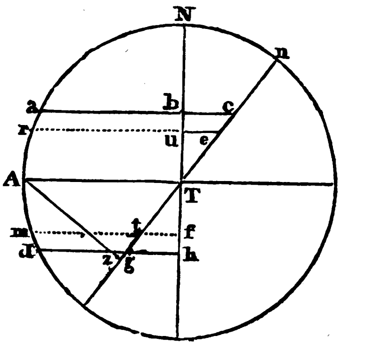
(g) * *Proindeque decrementum mediocre,* &c. In toto arcu N A, puncta assumantur quàm proxima quotquot lubebit, quæ quaternatim sumantur, ita ut quatuor quæ simul assumuntur ita disponantur ut duo ab octante æqualiter distent hinc inde, et alia duo tantumdem a syzygiâ et quadraturâ distent; decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ sunt inter syzygiam et octantem superat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ syzygiâ; si itaque motus mediocris assumendus sit, id decrementum quadrifariam dividi debet, et de motu mediocri singula quarta pars detrahi debet, sic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis simul sumptis; ille decrementi excessûs idem est pro quibusvis punctis ita quaternatim sumptis, itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis, adjectâ consideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ, erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cùm ergo ille excessus decrementorum super incrementa sit ipsum decrementum motus in syzygiâ seorsim consideratâ, et id decrementum in syzygiâ seorsim inventum sit, *decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygiâ.*

Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat $32''.\ 42'''.\ 7^{iv}$. Et decrementum motûs nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideóque decrementum illud est $17'''.\ 43^{iv}.\ 11^{v}$. cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$. motui horario mediocri superius invento $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. subducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

(h) Si nodi versantur extra quadraturas, et spectentur loca bina a syzygiis hinc inde æqualiter distantia, summa motuum nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur, ut A Z qu. ad A T qu. (i) Et decrementa motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideóque motus reliqui erunt ad invicem ut A Z qu. ad A T qu. et motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius

(h) * *Si nodi versantur extra quadraturas* putà in locis n *et spectentur loca bina a et d a syzygiâ A hinc inde distantia*, erit motus nodorum in loco a ut elementum a c e r et quadratum lineæ A Z conjunctim (Cor. 1. Prop. XXX.); similiter motus nodorum in loco d erit ut elementum m t g d et quadratum lineæ A Z conjunctim; si verò nodi versentur in quadraturis, erit (ibid.)



summa motuum in binis locis a et d ut a b u r + m f h d vel 2 a b r u et quadratum radii A T conjunctim; sed ob æqualia intervalla T b, T h summa arearum a c e r + m t g d = 2 a b r u. Quare summa motuum nodorum ubi Luna versatur in locis a, d nodis existentibus extra quadraturas, erit ad summam motuum ubi Luna in iisdem locis et nodi in quadraturis versantur ut 2 a b r u $\times$ A Z^2 ad 2 a b r u $\times$ A T^2 hoc est ut A Z^2 ad A T^2.

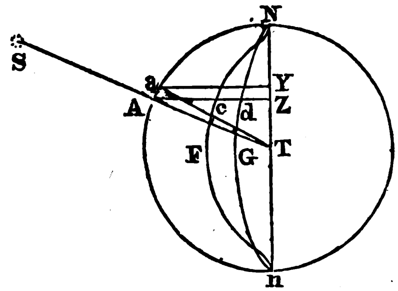
(i) * *Et decrementa motuum* in loco a quando nodi sunt extra quadraturas, et quando nodi sunt in quadraturis, sunt ut ipsi motus; nam cùm arcus a r in utroque casu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis a tempore mediocri utrinque eadem erit; ac per consequens error nodi, a loco in quo eo tempore mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motûs nodi in a ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motûs in a cùm nodi extra quadraturas versantur, ut a b u r $\times$ A T^2 ad a c e r $\times$ A Z^2, et pariter decrementum motûs nodi in d ubi nodi sunt in quadraturis, est ad decrementum motûs in d cùm nodi sunt extra quadraturas, ut m f h d $\times$ A T^2 ad m t g d $\times$ A Z^2, decrementa autem motûs in a et d æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias a syzygiâ, et m f h d = a b u r; hinc decrementum motûs in a cùm nodi extra quadraturas versantur, est ad a c e r $\times$ A Z^2 ut decrementum motûs in d cùm nodi extra quadraturas versantur, est ad m t g d $\times$ A Z^2, et etiam ut decrementum in a, aut d cùm nodi sunt in quadraturis ad a b u r $\times$ A T^2; ergo summa decrementorum in a et d cùm nodi sunt extra quadraturas, est ad (a c e r + m t g d) $\times$ A Z^2 ut summa decrementorum in a et d cùm nodi sunt in quadraturis ad 2 a b u r $\times$ A T^2, sed a c e r + m t g d = 2 a b u r per notam præcedentem, ergo, summa decrementorum in binis locis a syzygiis hinc inde æqualiter distantibus, cùm nodi sunt extra quadraturas, est ad summam decrementorum in iisdem locis cùm nodi sunt in syzygiis, ut A Z^2 ad A T^2, cùm ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipsâ ratione, ideóque et motus mediocres; *est itaque*, &c.

correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. ut A Z qu. ad A T qu.; id est, ut quadratum sinûs distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum Lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum versari in N, et singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad stellas fixas. Interea verò Solem S, per motum Terræ, progredi a nodo, et cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem A a arcus datus quàm minimus, quem recta T S ad Solem semper ducta, intersectione sui et circuli N A n, dato tempore quàm minimo describit: et motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut A Z q, id est (ob (l) proportionales A Z, Z Y) ut rectangulum sub A Z et Z Y, hoc est, ut area A Z Y a. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut summa omnium arearum a Y Z A, id est, ut area N A Z. (m) Est autem maxima A Z Y a æqualis rectangulo sub arcu A a et radio circuli; et propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentiâ totâ et radio, id est, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, (n) erat 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. Ideóque hujus dimidium 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. est motus medius nodorum, circulo toti respondens. Et motus



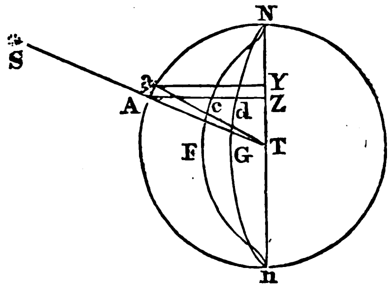
(l) * *Ob proportionales A Z, Z Y,* est enim T A : A a : : A Z : Z Y, ideóque ob constantes T A et A a, quantitates A Z, Z Y ubique eamdem habent inter se rationem; ducatur utraque in A Z facta A Z × A Z, et Z Y × A Z datam rationem ubique habebunt, erit itaque *A Z q ut rectangulum sub A Z et Z Y.*

(m) * *Est autem maxima A Z Y a,* &c. Nam quando T A est perpendicularis in N n, A Z evadit T A, et Z Y evadit æqualis A a, sicque A Z Y = A T × A a, in omnibus autem aliis punctis T A est major quàm A Z; et A a major quàm Z Y, maxima itaque A Z Y a est *æqualis rectangulo sub arcu A a et radio circuli.*

(n) * *Erat* 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}.; is enim erat motus horarius mediocris cùm nodi erant in quadraturis, per Prop. præced. ideóque in hâc Prop. cùm S A T est perpendicularis in N n.

nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A est ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. ut area N A Z ad circulum totum.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut Sol citius ad nodum revertatur, et computanda jam est abbreviatio temporis. (o) Cùm Sol anno toto conficiat 360 gradus, et nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, seu 39,6355 gradus; et motus mediocris nodi in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in quadraturis suis, ut A Z q ad A T q: erit motus Solis ad motum nodi in N, ut 360 A T q ad 39,6355 A Z q; id est, ut 9,0827646 A T q ad A Z q. Unde si circuli totius circumferentia N A n dividatur in particulas æquales A a, tempus quo Sol percurrat particulam A a, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus unâ cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 × A T q ad 9,0827646 A T q + A Z q. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, et hæc velocitas est summa velocitatum Solis et nodi. Igitur si tempus, quo Sol sine motu nodi percurreret arcum N A, exponatur per sectorem N T A, et particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum A a, exponantur per sectoris particulam A T a; et (perpendiculo a Y in N n demisso) si in A Z capiatur d Z, ejus longitudinis (p) ut sit rectangulum d Z in Z Y ad sectoris particulam A T a ut A Z q ad 9,0827646 A T q + A Z q, id est, ut sit d Z ad



(o) * *Cùm Sol,* &c. Velocitas Solis est ad velocitatem nodi cùm nodi sunt in quadraturis, ut 360^d. quæ est via Solis toto anno ad 39. 38'. 7''. 50'''. seu 39.6355. gradus quos nodus toto anno conficeret, si toto anno maximâ suâ celeritate moveretur; velocitas nodi, cùm nodi sunt in quadraturis, est ad nodi velocitatem cùm nodi distant a Sole arcu A N ut A T q ad A Z q per Prop. præced. ergo ex æquo et compositis rationibus, velocitas Solis est ad velocitatem nodi cùm nodi distant a Sole arcu A N ut 360 A T q ad 39.6355 A Z q; id est, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 A T q ad A Z q. Sed dividendo 360 per $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$. prodit numerus 9.0827646 loco hujusce 9.0827667 collocandus.

(p) * *Ut sit rectangulum d Z in Z Y ad sectoris particulam A T a.* Sectoris particula A T a est semper æqualis dimidio rectanguli A T in A a, est verò Z Y ad A a ut A Z ad A T, ducantur antecedentes in d Z et consequentes in ½ A T erit rectangulum d Z in Z Y ad ½ A T × A a sive ad sectoris particulam A T a ut d Z in A Z ad ½ A T q sive ut d Z in 2 A Z ad A T q, sed sumitur esse d Z in Z Y ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q ergo etiam d Z in 2 A Z est ad A T q ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q et vicissim d Z in 2 A Z est ad A Z q ut A T q ad 9.0827646 × A T q + A Z q et dividendo duos priores terminos per 2 A Z est d Z ad ½ A Z ut A T q ad 9.0827646 A T q + A Z q.

$\frac{1}{2}$ A Z ut A T q ad 9,0827646 A T q + A Z q; (q) rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quò arcus A a percurritur. (r) Et si punctum d tangit curvam

(q) * *Rectangulum d Z in Z Y designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum;* nam, ex superioribus, tempus quo Sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo Sol a nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q, sed, ex hypothesi, sectoris particula A T a designat prius tempus, ea ergo quantitas d Z × Z Y quæ est ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam N d G n.* Numerus 360 designetur per a, numerus 39,6355 dicatur b, ideóque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, A T dicatur r, et A Z, y, eritque $d\,Z = \dfrac{\frac{1}{2} r^2 y}{\frac{a}{b} r^2 + y^2} = \dfrac{\frac{1}{2} b r^2 y}{a r^2 + b y^2}$ et in puncto T ubi A Z evadit A T sive ubi fit $y = r$ est $d\,Z = \dfrac{\frac{1}{2} b r}{a + b} = \dfrac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $T\,Z = \sqrt{rr - yy}$, et T Z ad A Z ut fluxio ordinatæ A Z ad Z Y, ideóque $Z\,Y = \dfrac{y\,dy}{\sqrt{rr - yy}}$, hinc elementum $d\,Z \times Z\,Y = \dfrac{\frac{1}{2} b r^2 y^2 dy}{(a r^2 + b y^2)\sqrt{rr - yy}}$ et elementum segmenti N A Z est $\dfrac{y^2 dy}{\sqrt{rr - yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr - yy}$ æqualis seriei $r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \frac{5y^8}{128r^7} - \frac{7y^{10}}{256r^9}$, &c.
et $\dfrac{y^2}{\sqrt{rr - yy}}$ æqualis seriei $\frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$, &c.
quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r, unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per d y et fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum N A Z, $\frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9}$, &c.
quæ series parùm convergit quando $y = r$ sed tunc segmentum N A Z est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

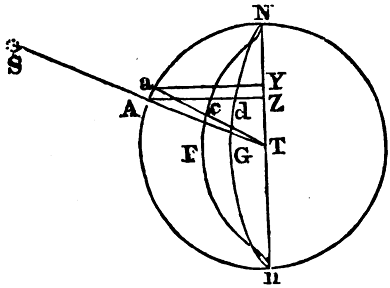
Dividatur $\frac{1}{2} b r^2$ per $a r^2 + b y^2$, fit series $\frac{b}{2a} \times \left(1 - \frac{by^2}{ar^2} + \frac{b^2y^4}{a^2r^4} - \frac{b^3y^6}{a^3r^6} + \frac{b^4y^8}{a^4r^8}, \text{\&c.}\right)$
quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Multiplicetur itaque per hanc seriem, series $\dfrac{y^2}{\sqrt{rr - yy}}$ superius inventa et obtinebitur hæc

$$\begin{array}{llllllll}
\text{series } \frac{b}{2a} \times & \frac{y^2}{r} + & \frac{y^4}{2r^3} + & \frac{3y^6}{8r^5} + & \frac{5y^8}{16r^7} + & \frac{35y^{10}}{128r^9} + & \frac{63y^{12}}{256r^{11}}, \text{\&c.} \\
-\frac{b^2}{2a^2} \times & & \frac{y^4}{r^3} + & \frac{y^6}{2r^5} + & \frac{3y^8}{8r^7} + & \frac{5y^{10}}{16r^9} + & \frac{35y^{12}}{128r^{11}}, \text{\&c.} \\
+\frac{b^3}{2a^3} \times & & & \frac{y^6}{r^5} + & \frac{y^8}{2r^7} + & \frac{3y^{10}}{8r^9} + & \frac{5y^{12}}{16r^{11}}, \text{\&c.} \\
-\frac{b^4}{2a^4} \times & & & & \frac{y^8}{r^7} + & \frac{y^{10}}{2r^9} + & \frac{3y^{12}}{8r^{11}}, \text{\&c.}
\end{array}$$

et multiplicetur hæc series per d y et integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ N d Z.

N d G n, area curvilinea N d Z erit decrementum totum, quo tempore arcus totus N A percurritur; et propterea excessus sectoris N A T supra aream N d Z erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore



$$\begin{array}{llllllll}
 & \frac{b}{2a} \times & \frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} & + \frac{3y^7}{56r^5} & + \frac{5y^9}{144r^7} & + \frac{35y^{11}}{1408r^9} & + \frac{63y^{13}}{3308r^{11}}, \&c. \\
- & \frac{b^2}{2a^2} & \quad\; \frac{y^5}{5r^3} & + \frac{y^7}{14r^5} & + \frac{3y^9}{72r^7} & + \frac{5y^{11}}{176r^9} & + \frac{35y^{13}}{1664r^{11}} \\
+ & \frac{b^3}{2a^3} \times & & \;\; \frac{y^7}{7r^5} & + \frac{y^9}{18r^7} & + \frac{3y^{11}}{88r^7} & + \frac{5y^{13}}{208r^{13}} \\
- & \frac{b^4}{2a^4} \times & & & \;\; \frac{y^9}{9r^7} & + \frac{y^{11}}{22r^9} & + \frac{3y^{13}}{104r^{11}}
\end{array}$$

Termini variabiles primæ lineæ hujusce seriei, seriem ipsam illam constituunt quæ est valor segmenti N A Z, ejus itaque primæ lineæ valor est $\frac{b}{2a}$ N A Z.

Si dividantur omnes termini secundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, observabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correspondentes primæ lineæ, ut, si exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ϵ, quantitas eadem quæ in primâ lineâ dividitur per ϵ, in secunda linea dividatur per $\epsilon + 2$; sic termino primo secundæ lineæ diviso per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in primâ lineâ dividitur per 3, in secundâ per 5, sicque in omnibus terminis utriusque lineæ, ut facile constabit ex ipsâ origine istius seriei, et integrationis lege; hinc si ad communem denominatorem reducantur termini utriusque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\epsilon + 2$, numerator secundæ in ϵ, et denominator communis erit $\epsilon \times \overline{\epsilon + 2}$; quare subductis terminis secundæ lineæ a terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ seriei ductos in $\frac{2}{\epsilon + 2}$ quod seriei convergentiam plurimum augebit; ideóque termini variabiles secundæ lineæ erunt $\frac{y^2}{r^2} \times$ N A Z $- \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1504r^7}, \&c.\right)$ dicatur ad brevitatem series horum terminorum D et valor verus istius secundæ lineæ est $- \frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ N A Z $+ \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} \times$ D.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad secundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, et si dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum secundæ et tertiæ lineæ exprimetur per terminos secundæ seriei ductos in $\frac{2}{y + 2}$, ideóque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4} \times$ N A Z $- \frac{y^4}{r^4} \times$ D $- \frac{y^2}{r^2} \times \left(\frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}, \&c.\right)$ dicatur E series horum terminorum et valor verus tertiæ lineæ erit $+ \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times$ N A Z $- \frac{b^3y^4}{2a^3r^4} \times$ D $- \frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E ex quibus facile intelligitur valorem areæ N d Z exprimi posse hac ratione minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area A a Y Z diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in A Z longitudo e Z, quæ sit ad longitudinem A Z ut A Z q ad 9,08276 A T q + A Z q. (s) Sic enim rectangulum e Z in Z Y erit ad aream A Z Y a ut decrementum temporis, quo arcus A a percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam N e F n, area tota N e Z, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus A N percurritur; et area reliqua N A e respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus N A per Solis et nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam verò area

$$\frac{b}{2a}\times NAZ.$$
$$-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times NAZ+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}D$$
$$+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^2}{2a^3r^4}D-\frac{b^3y^2}{2a^3r^2}E$$
$$-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times NAZ+\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}D+\frac{b^4y^4}{2a^4r^4}E+\frac{b^4y^2}{2a^4y^2}F, \&c.$$

Unde summæ coëfficientium quantitatum N A Z, D, E, F, &c. qui progressiones geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri possunt, ideóque tandem area N d Z est $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}\times$ $NAZ+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}D-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}E+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}F$, &c.

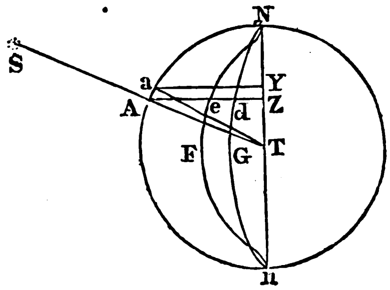
Cor. 1. Primus terminus seriei quæ exprimitur per D est $\frac{2}{3}$ primi termini seriei quæ exprimit segmentum N A Z, et reliqui termini seriei D sunt minores respectu reliquorum terminorum seriei quæ exprimit id segmentum, ergo D minor est quàm $\frac{2}{3}$ N A Z, et pariter E minor est quàm $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, et F minor quàm $\frac{5y^2}{9r^2}$, &c. hinc valor N d Z major esse nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}\times$ $NAZ+\frac{\frac{1}{3}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}NAZ,=\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}$ $\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor esse potest quantitate $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi r = y et N A Z est quadrans circuli valor areæ N d Z major non est quantitate $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}$, nec minor quàm $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; sive major non est quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ sive quadrantis $\frac{1}{19,3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

Cor. 3. In casibus in quibus y est quàm minima, ita ut ar^2+by^2 pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{bNAZ}{ar^2}\times\frac{1}{2}r^2$ ad verum valorem satis accedet, fietque valor areæ N d Z $=\frac{1}{18.1655292}$ segmenti N A Z, unde habentur velut limites valoris areæ N d Z in variis punctis curvæ.

(s) * *Sic enim rectangulum e Z in Z Y erit ad aream A Z Y a*, &c. Ex præcedentibus, area A Z Y a motum nodorum mediocrem exprimit posito Solem sine motu nodi percurrere arcum A a, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium a nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cùm ergo tempus quo Sol percurrit A a sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur A a posito motu nodi ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q si fiat A Z ad A e in eâ ratione, et utrumque ducatur in Z Y, erunt areæ A Z × Z Y, ad A e × Z Y ut motus nodorum in hypothesi priori ad eorum verum motum; et convertendo erit e Z × Z Y ad A Z × Z Y ut differentia motuum ad motum priorem, sive ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q.

(t) 116. * *Jam verò area semi-circuli est ad aream N e F n.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream N A n e N inter semi-peripheriam N A n et curvam N e n contentam, quàm detrahemus ex semi-circuli are ; tumque semi-circuli est ad aream figuræ N e F n, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti, erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. et propterea motus, qui figuræ N e F n duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum



residuum erit area N e F n, quàm cum semi-circuli areâ conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^{\circ}. = a$, $39^{\circ}.6355 = b$, $AT = r$ et $AT = r$ et $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti $9.0827646\ ATq + AZq$ (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad $9.0827646\ ATq$ sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad A e quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc elementum areæ a A e est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ N d G n notâ superiore 115. inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ N A n F N est ad elementum areæ N d G n in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}$ b; unde si valor hujus areæ N d G n in notâ (r) inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur, et multiplicetur per a, habebitur valor areæ N A n F N qui itaque prodibit $\frac{ar^2}{ar^2+by^2} NAZ + \frac{by^2}{ar^2+by^2} \times D - \frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2} E + \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2} F$,

Tollatur verò hæc area ex segmento N A Z, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2} NAZ$ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times NAZ - \frac{by^2}{ar^2+by^2} D + \frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2} \times E - \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2} F$, &c. idque residuum est area quæsita N e Z, quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times (NAZ - D + \frac{b}{a} E - \frac{b^2}{a^2} F$, &c.)

Jam autem ut habeatur ratio semi-circuli ad aream N e F N, sive, quod idem est, quadrantis circuli ad N F T ejus areæ N e F n dimidium; dicatur c quadrans peripheriæ cujus radius est r; sitque m ad n ut c est ad r; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, et cùm N A Z est quadrans, tum $y = r$ ergo valor dimidii areæ N e F n est $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a} E - \frac{b^2}{a^2} F + \frac{b^3}{a^3} G$, &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est

$$r^2 \times (\frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304});$$

qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\, r^2$. Omittantur reliqui termini quantitatis D ut et quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, et quoniam est $r = \frac{nc}{m}$ ideóque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times (\frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184)$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times (1 - \frac{2n}{m} \times .184)$ ad 1, substituendo autem loco b et a eorem valores, est $\frac{b}{a+b} = .099$; et ex naturâ circuli est 2 n ad m, sive diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideóque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ sive .099 efficit .0758 qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur, sed .0758 in 793 efficit 60. 10. Ergo est area quæsita N e F n ad semi-circulum ut 60. proxime ad 793. Q. e. i.

Omisimus terminos seriei D præter quinque priores, et terminos serierum E, F, &c. facilè enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos seriei D, prope æquales fieri terminis seriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi sunt, sicque mutuò destrui, reliquæ verò series cùm per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur, brevi evanescunt, ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum Sole; et hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}. 40'. 54''. 7'''$. motum Solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''$. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. (u) Idem per tabulas astronomicas est $19^{gr}. 21'. 21''. 50'''$. Differentia minor est parte trecentesimâ motûs totius, et ab orbis lunaris eccentricitate et inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, et per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, et ad justam velocitatem reducitur.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

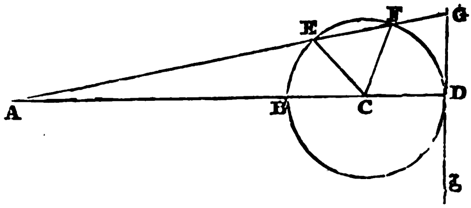
Invenire motum verum nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area N T A — N d Z, motus iste est ut area N A e, et inde datur. (x) Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præstat

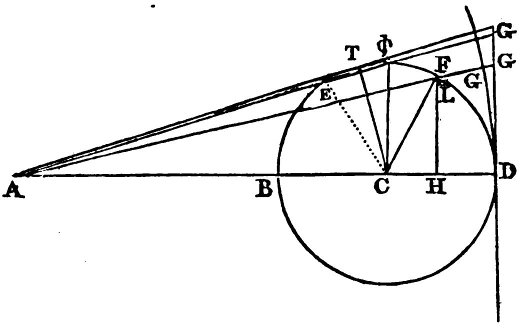
(u) * *Idem per tabulas astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi $19^{\circ}. 19'. 45''$. quibus additis $49''$. pro motu nodi per $6^{h}. 10'. 54''$. quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est $19^{\circ}. 20'. 34''$., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, et is dissensus est adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana theoria ex calculo motûs nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate et inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

(x) 117. * *Verùm ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipsis seriebus in notis 115. et 116. adhibitis, quæ cùm parum convergant, regressum non tantùm difficilem, sed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus, quæ ut intelligantur, duas hypotheses assumere liceat quibus pedetentim ad ipsam constructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo hypothesis ea sit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, singulis horis retrahi nodum in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio datum servet situm ad fixas; interea verò Solem progredi a nodo: eâ quippe in hypothesi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræsentat totum nodorum motum integro anno sidereo, ideóque sectores N A T repræsentabunt motum medium eo tempore quo Sol discedit a nodo arcu N A et segmenta N A Z repræsentabunt motum verum eo ipso tempore, ideóque triangulum A T Z repræsentabit differentiam motûs medii a motu vero, quæ debebit subtrahi a motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, et tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in secundo et quarto: cùm itaque tota area circuli sive factum totius peripheriæ in $\frac{1}{2}$ r, designet totum motum nodorum durante anno sidereo, repræsentabit A T Z eam æquationem, quæ æquatio cùm A Z sit y et T Z $= \sqrt{rr - yy}$ est $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{rr - yy}$: dividatur ergo tam circuli valor quàm areæ A T Z valor per $\frac{1}{2}$ r, erit peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr - yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno sidereo ad æquationem quæsitam, sive primum consequentem duplicando et secundi antecedentis dimidium sumendo, quod proportionem non turbat, erit peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr - yy}}{r}$, ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam: sed ex principiis trigonometricis, sinus ejus arcûs qui foret duplus arcûs N A cujus sinus est y foret $\frac{2y\sqrt{rr - yy}}{r}$; ergo si describatur circulus radio quocumque C B, et sumatur arcus B F duplus, arcus N A, hoc est duplus distantiæ Solis a nodo (quæ distantia per motus medios Solis et nodi haberi potest) erit peripheria tota ad F H sinum ejus arcûs B F ut motus semestris nodi ad æquationem quæsitam; ideo producatur D C B in A, ita ut radius A D sit ad radium C D ut periphesequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis C D, describatur circulus B E F D. Producatur D C ad A, ut sit A B ad A C ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi nodi sunt in quadraturis, id est, ut $19^{gr}.\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$.; atque ideo B C ad A C ut motuum differentia $0^{gr}.\ 31'.\ 2''.\ 32'''$., ad motum posteriorem $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55''$. hoc est, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita G g, quæ tangat circulum in D; et si capiatur angulus



ria tota ad motum semestrem nodi, sive ut a ad $\frac{1}{4}$ b, et centro A radio A D describatur arcus D G et sumatur ejus arcûs longitudo quæ sit æqualis sinui F H, numerus graduum ejus arcûs D G erit ipsa æquatio quæsita; nam si sumeretur in circulo cujus radius est C D arcus D L cujus longitudo esset æqualis F H, foret tota peripheria seu 360^{gr}. ad numerum graduum in eo arcu D L contentorum ut numerus graduum motûs semestris nodi ad numerum graduum



æquationis quæsitæ, sive alternando, tota peripheria ad numerum graduum motûs semestris ut numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ; sed ex constructione cùm longitudo arcûs D G sumatur æqualis sinui F H, sive arcui D L, numerus graduum in eo arcu D L contentorum est ad numerum graduum in arcu D G contentorum inversè ut eorum circulorum radii, hoc est ex constructione, ut 360^{o}. ad numerum graduum motûs semestris nodi, ergo numerus graduum arcûs D G est ipse numerus graduum æquationis quæsitæ; satis liquet autem arcum D G paucorum graduum esse debere, et a lineâ rectâ parum differre; hinc si in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius est C D, sumaturque D G in tangente æqualis ipsi sinui F H; perinde prope erit ac si sumeretur ea longitudo secundum arcum circuli radio A D descripti, et punctum G sive in tangente sive in arcu sumatur, eodem in loco occurret quam proximè; ita ut ex hâc constructione, angulus G A D cujus arcus D G est mensura, sit ipsa æquatio quæsita, substractiva in 1^{o}. et 3^{o}. quadrante, additiva in 2^{o}. et 4^{o}. et obtinebitur juxta trigonometriæ principia, dicendo ut A C, sive $360^{gr}. - 9^{gr}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''$., ad C F sive C B, nempe $9^{gr}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''$., hoc est, ut a $- \frac{1}{4}$ b ad $\frac{1}{4}$ b, sive ut $35\frac{1}{3}$ ad 1. Ita sinus duplæ distantiæ Solis a nodo ad æquationem quæsitam: maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area A T Z quæ æquationem repræsentat, est major in octantibus quàm in alio loco.

His probè intellectis facilè inde ad veriorem computum procedere licebit.

2. *Hyp.* In constructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer N A n N designat annum sidereum, simulque motum nodorum in hypothesi quòd Sol ipse describit id spatium quo nodi reverâ ab ipso discedunt; in hâc autem hypothesi motus nodorum est $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. et calculis nostris per quantitatem $\frac{1}{4}$ b fuit expressum.

Si autem reverâ arcus A N repræsentet recessum Solis a nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia N A n N describetur, non erit annus sidereus, sed tempus elapsum inter syzygiam Solis nodique et syzygiam sequentem Solis cum eodem nodo, cùmque uniformiter describatur ea circumferentia, siquidem ad motus medios Solis et nodorum refertur, sectores circuli N A n N erunt proportionales motui mediò nodorum; itaque si totus circulus repræsentet

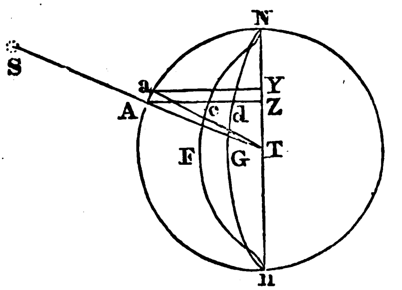
B C E vel B C F æqualis duplæ distantiæ Solis a loco nodi, per motum medium invento; et agatur A E vel A F secans perpendiculum D G in G; et capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr}.\ 11'.\ 3''$.) ut tangens D G ad circuli B F D circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus D A G usurpari potest) ad

motum nodorum a tempore quo Sol et nodus fuêre conjuncti usque ad sequentem Solis syzygiam cum eodem nodo, sector A T N repræsentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis et nodi, nodus et Sol arcu N A a se mutuo recessêre.

Tempus autem, inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, hac ratione a Newtono determinatur per observationes; anno sidereo dum nempe Sol 360^{gr}. emetitur, motus nodi per observationes astronomicas $19^{gr}.\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis et nodi quæ simul describuntur quocumque tempore, ideóque via Solis et via nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter se ut 360 ad $19^{gr}.\ 21'.\ 22''.\ 50'''$., sed illæ duæ viæ simul sumptæ 360^{gr}. efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una sit ad alteram ut 360^{gr}. ad $19^{gr}.\ 21'.\ 22''.\ 50'''$. Hæc ultima pars quæ est $18^{gr}.\ 22'.\ 6''$. circiter, erit motus nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur: si ex toto circulo NAnN duplum areæ N F n tollatur, residuum est verus motus nodi inter syzygias; sed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times .766}{a+b}$ ad 1, sive proximè ut $\frac{\frac{3}{4} b}{a+b}$ ad 1. In eâdem verò erit ratione duplum areæ N F n (quod est quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4} b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}$ b qui est numerus graduum quem area circuli designat, ad numerum graduum designatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8} b^2}{a+b}$; cùm ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}$ b designet in Prop. XXXII., et duplum areæ N F n designet $\frac{\frac{3}{8} b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}$ b tollatur, residuum $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a+b}$ est verus motus nodi inter syzygias.

Itaque cùm motus medius nodorum sit ut sector A T N, et motus verus nodi exprimatur per aream N A e; æquatio est ut A T N — N A e, hoc est, cùm totus circulus repræsentet motum nodorum inter syzygias, est 2 r c ad A T N — N A e ut $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a+b}$ ad æquat. $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a+b)}$ (A T N — N A e), sed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{a r^2}{a r^2 + b y^2} \times$ N A Z (omissis cæteris terminis qui per D, E, &c. multiplicantur ut pote minimis). Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a+b)}$ (NTA $- \frac{a r^2}{a r^2 + b y^2} \times$ N A Z); eum autem casum sumamus in quo A N est peripheriæ octans, quia in primâ hypothesi liquet eo in casu æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2} r^2$, et eâ substitutione factâ et loco N T A posito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a+b)}$ (T A Z + $\frac{\frac{1}{2} b \text{ N A Z}}{a + \frac{1}{2} b}$) et cùm area circuli sit .785 dum quadratum diametri est 1, et octans circuli N T A sit ad ejus quadrati octantem

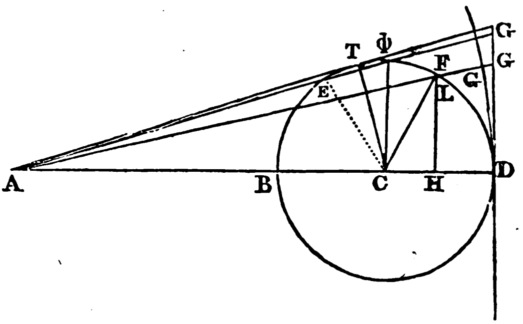


cujus dimidium est T A Z in eadem ratione, est N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideóque dividendo est N A Z ad T A Z ut .285 ad .5, et est N A Z = .57 T A Z unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 r c (a+b)} \left(\frac{a + .78\, b}{a + \frac{1}{2} b}\right)$ T A Z: sed in hâc hypothesi est T A Z $= \frac{1}{4} r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{4 c \times 2 (a+b)} \left(\frac{a + .78\, b}{a + \frac{1}{2} b}\right)$ r et ad hanc proportionem revocatur, 4 c sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2 (a+b)}$ quod est dimidium motûs nodi inter syzygias ut $\frac{a + .78\, b^2}{a + \frac{1}{2} b}$ r ad æquationem; hoc modo autem construitur quantitas $\frac{a + .78\, b}{a + \frac{1}{2} b}$ r, sive simplicius $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b}$ r, describatur circulus B C D cujus radius B C = r = $\frac{1}{4}$ b; producatur C B in A ut sit A B = a + $\frac{1}{4}$ b, ideóque A C = a + $\frac{1}{2}$ b, et A D =

motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt a quadraturis ad syzygias, et ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo

$a + \frac{3}{4} b$, centro C erigatur perpendicularis C Φ ad circulum usque, et pariter in extremo diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2} b$ est ad A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ut est C Φ sive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b} r$, ideóque erit tota circumferentia ad dimidium motûs inter syzygias ut D G ad æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes et alternando ut Newtoni expressio habeatur, est æquatio ad motum nodi inter syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem æquatio quæsita, erit prope æqualis angulo D A G; nam in triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angu-



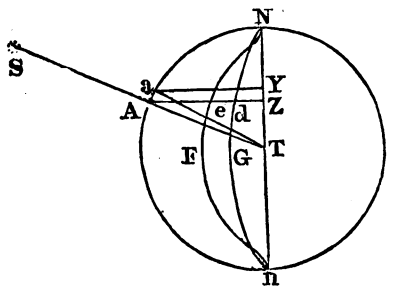
lus pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{3}{4} b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4} b$; sed si $a + \frac{3}{4} b$, et $\frac{1}{4} b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{4} b}{a + b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4} a^2 b + \frac{1}{4} a b^2}{(a + \frac{3}{4} b)(a + b)}$; divisione factâ per $a + \frac{3}{4} b$ quotiens est $\frac{\frac{1}{4} a b + \frac{1}{16} b^2}{a + b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4} b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2(a + b)}$ quæ exprimit dimidium motûs nodi inter syzygias; ergo resumendo cùm sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motûs nodi inter syzygias, in eâque ratione sit D G ad æquationem, ipse angulus D A G est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; in ipsâ peripheriâ D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut $360^{gr.}$ ad dimidium motûs nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus et in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{3}{4} b$ ad radium C D sive $\frac{1}{4} b$; ita numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inversè ut eorum radii, sed $a + \frac{3}{4} b$ est ad $\frac{1}{4} b$ ut $360^{gr.}$ sive a ad dimidium motûs nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{2(a + b)}$; est ergo 360 ad dimidium motûs nodi inter syzygias ut numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum arcûs D G, sed ita etiam erat numerus graduum arcûs D L ad numerum graduum æquationis quæsitæ, ergo numerus graduum arcûs D G est ipsa æquatio quæsita, sed A G secabit arcum D G in puncto tali ut arcus inter eam lineam et punctum D interceptus sit proximè æqualis tangenti D G, nam in parvis arcubus, tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea A G secabit arcum D G in G quamproximè, sed arcus D G cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli D A G, ergo angulus D A G pro æquatione usurpari potest.

Dicit autem Newtonus lineam A B debere esse ad lineam A C ut motus medius ad semissem motûs veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $10^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. In hâc autem constructione fecimus $A B = a + \frac{1}{4} b$ et $A C = a + \frac{1}{2} b$, res autem eodem redit, cùm enim motus nodi inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter syzygias $\frac{a a + \frac{1}{2} a b - \frac{1}{8} b^2}{a + b}$, iste motus Solis erit ad ejus motum annuum $360^{gr.}$ sive a ut motus nodi inter syzygias $\frac{\frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} b^2}{a + b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2} a^2 b + \frac{1}{8} a b^2}{a a + \frac{1}{2} a b - \frac{1}{8} b^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2} b$ quod exprimit semissem motûs veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2} a^2 b + \frac{1}{8} a b^2$ ad $\frac{1}{2} a a b + \frac{1}{4} a b b - \frac{1}{16} b^3$ sive omisso termino $\frac{1}{16} b^3$, divisis reliquis terminis per a b et duplicatis ut $a + \frac{1}{4} b$

tempus per aream N T A — N A Z, et motum nodi per arcum N A e; ut rem perpendenti et computationes instituenti constabit. Hæc est ad $a + \frac{1}{2} b$; ergo in constructione nostrâ est A B sive $a + \frac{3}{4} b$ ad A C sive $a + \frac{1}{2} b$ ut motus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto anno describeretur eo motu quem habent nodi in quadraturis; itaque erit etiam $a + \frac{3}{4} b$ ad $a + \frac{1}{2} b$ sive A B ad A C ut motus medius nodi ad semissem motûs veri in quadraturis, ut statuit Newtonus; observandum quidem ex hâc constructione æquationem futuram maximam quando linea A G tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, et si a puncto A ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita sinus totus ad cosinum anguli B C T, qui angulus B C T deprehendetur esse $88\frac{1}{2}°$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}°$. est verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab octante adeo parum dissitus ut in sequentibus æquationem maximam fieri in octantibus supponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio, quæ verè maxima foret, ab eâ quæ fit in octantibus insensibiliter differret.

3. *Hypoth.* Finximus arcum A N esse octantem peripheriæ, et eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis distantiis Solis a nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubivis enim æquatio erit $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)}$ $\left(TAZ + NAZ - \frac{ar^2}{ar^2+by^2} NAZ\right) = \frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)} \left(TAZ + \frac{by^2}{ar^2+by^2} NAZ\right)$ sumatur N A Z esse ad T A Z ut $r - \sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum est de spa-



tio rectilineo N A Z non verò de curvilineo N A Z, sed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ errorem non magnum pariet; fit æquatio $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2rc(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ $\times TAZ$ sive numeratore et denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit

$$\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{ac \times 2(a+b)} \left(\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right) \frac{4TAZ}{r},$$

quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, 4 c sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motûs nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$ ad æquationem quæsitam.

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}$ $\times \frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus B F D cujus radius B C = r = $\frac{1}{4}$ b, ideóque b = 4 r, producaturque C B in A ita ut sit A B = $a + \frac{1}{4} b$, sumatur arcus B F duplus arcûs A N, ductoque perpendiculo F H, et tangente erectâ in D ductâque A F G erit D G prope æqualis quantitati $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2} \times \frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione A H ad A D ut F H ad D G ideóque D G = $\frac{AD}{AH} \times$ F H est autem $\frac{ar^2 + \frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2} \times \frac{4TAZ}{r} = \frac{AD}{AH} \times$ F H, nam posito 4 r loco b et utroque terminc diviso per r^2, fit $\frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}}$; valor mediocris quadrati y^2 est $\frac{1}{2} r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}} = \frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quàm $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6y^2}{r} = 3r$; præterea $\frac{2y^2}{r}$ valore suo mediocri est r, est etiam $\frac{2y^2}{r}$ sinus versus arcûs dupli ejus cujus sinus est y, ideóque $\frac{2y^2}{r}$ est accuratè æquale B H unde $a + \frac{4y^2}{r}$ est $a + r +$ B H, sed $a + r$ per constructionem est A B, ergo $a + \frac{4y^2}{r}$ est A H, ideóque $\frac{a + \frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a + \frac{4y^2}{r}} = \frac{a+3r}{AH}$ absque errore æquatio semestris motus nodorum. (y) Est et æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cùm variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; inæqualitas et æquatio menstrua nodorum ita se mutuo contemperant et corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine Lunæ negligi possunt.

Corol. Ex hac et præcedente Propositione (z) liquet quod nodi in syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario

sensibili, quia si $\frac{2y^2}{r}$ minus sit aut majus quàm r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, et ea quantitas non est magna respectu totius A H, manebit idem fractionis valor; sed $a + 3r = AD$ ideóque fractio $\dfrac{ar^2 + \dfrac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ est proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.

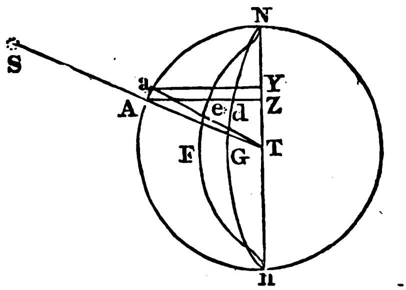
Est verò accuratè $\frac{4TAZ}{r} = FH$, nam triangulum $TAZ = \frac{AZ \times TZ}{2}$, est $AZ = y$, $TZ = \sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r} = \frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; sed, ex principiis trigonometricis, sinus arcûs dupli ejus cujus sinus est y, est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo sinus arcûs B F qui duplus est arcûs A N cujus sinus est y, est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, sed sinus arcûs B F est F H ex constructione, ideóque $FH = \frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r} = \frac{4TAZ}{r}$, et quantitas

$$\frac{AD}{AH} \times FH = \frac{ar^2 + \dfrac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2} \times \frac{4TAZ}{r}.$$

Quibus expositis, cætera, nempe angulum D A G pro æquatione sumi posse, lineas A B ad A C sumendas esse ut motus medius nodi ad semissem ejus motûs in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in hypothesi secundâ.

(y) * *Est et æquatio menstrua*, ex iis quæ in Prop. XXX. et XXXI. dicta sunt, liquet quod dum Luna motu menstruo circa Terram fertur, nodi satis inæqualiter feruntur; hinc si locus nodorum ex eorum motu medio æstimatur, locus ille medius a vero nonnihil differret, idque quod esset corrigendum secundum diversam Lunæ ipsius distantiam a nodo, æquatio menstrua meritò diceretur, sed cùm totus motus menstruus Lunæ non sit 2^{gr}. et compensetur latitudinis error qui ex falsâ nodi positione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc æquationem tradere, suo loco autem de eâ compensatione agetur.

(z) * *Liquet quod nodi in syzygiis quiescunt.* Etenim motus nodorum est ut area A Z Y a dempta area e Z Y, ubi verò nodi sunt in syzygiis ideóque ubi punctum A incidit in N, evanescit linea A Z ac per consequens area A Z Y a — e Z Y nullus itaque est nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* $16''$. $19'''$. 26^{iv}. Si nodi distent 90^{gr}. a Sole, A Z fit æqualis A T, et $ZY = Aa$, ideóque area A Z Y a quæ est parallelogrammum ejusdem altitudinis ac baseos ad triangulum A T a est ejus duplum, cùmque e Z sit ad A Z ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q sitque $AZ = AT$ in hoc casu, erit $eZ = \frac{AT}{10.0827646}$ et area e Z Y est $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ sive duplum trianguli A T a divisum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream A Z Y a —



e Z Y, est in hoc casu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area N A n N motum annuum designat 19^{gr}. $49'$. $3''$. $55'''$. Triangulus A T a motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo 19^{gr}. $49'$. $3''$. $55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum, et eâ divisione factâ numerus graduum quem repræsentat triangulus A T a, invenietur $8''$. $8'''$. 18^{iv}. 51^{v}. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''$. $18'''$. 8^{iv}. 51^{v}. invenietur $16''$. $19'''$. 26^{iv}. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

16″. 19‴. 26^{iv}. (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit 1^{gr}. 30′. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum J. Machin, Astron. Prof. Gresham, et Henr. Pemberton, M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas Propositiones continebant, et inter se in utrisque congruebant. Chartam verò D. Machin, cùm prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

" *Motus Solis medius a nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipsius Solis medium, et motum illum mediocrem quo Sol celerrimè recedit a nodo in quadraturis.*

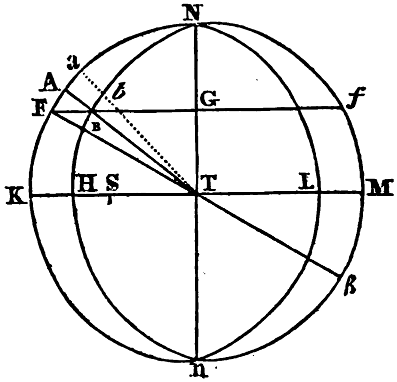
" Sit T locus ubi Terra, N n linea nodorum Lunæ ad tempus quodvis datum, K T M huic ad rectos angulos ducta, T A recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari quâ Sol et nodus a se invicem rece-

(a) * *Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit* 1^{gr}. 30′. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motûs nodi inter syzygias quod est 9^{gr}. 11′. 3″. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b} \times r$ ad æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque a + .78 b est ut 9.8627646 et a + ½ b ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} = 1.0292191$, quæ ducta in r = ¼ b = 9^{gr}. 54′. 31″. 57‴. dat 10^{gr}. 11′. 54″. 15‴. 8^{iv}. 11^{v}., ducta iterum in 9^{gr}. 11′. 3″., dat 93^{gr}. 39′. 49″. 48‴., sed si radius r circuli B F D B exprimatur per numerum 9^{gr}. 54′. 31″. 57‴., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus 62^{gr}. 13′. 39″. 50″. Diviso itaque numero 93^{gr}. 39′. 49″. 48″. per 62^{gr}. 13′. 39″. 50‴. Quotiens sive æquatio quæsita est 1^{gr}. 30′. 18″., &c.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates 4 c et r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cùm enim is radius æquipolleat ¼ b, et ¼ b sit 9^{gr}. 54′. 31″. 57‴., cavendum ne 4 c sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad 9^{gr}.54′.31″.57‴. ut est circumferentia ad radium.

De hac autem æquatione semestri non agunt de la Hirius et Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usûs est ad calculum eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque lunares tabulæ, hanc autem æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) et in octantibus distantiæ Solis a nodo hanc faciunt 1^{gr}. 39′. 46″., utrum accurratioribus tabulis hæc æquatio ad 1^{gr}. 30′. 18″. magis accederet, ignoramus; at, qui probè norunt quam difficile sit observationes loci nodi accuratissimas habere extrà eclipses, et quantùm parvus error in latitudine Lunæ et in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen 9′. obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum phænomenis cœlestibus probè quadrare, et facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quàm calculo esse tribuendum.

dunt; ita ut angulus inter rectam quiescentem N n et revolventem T A, semper fiat æqualis distantiæ locorum Solis et nodi. Jam si recta quævis T K dividatur in partes T S et S K quæ sint ut motus Solis horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in quadraturis, et ponatur recta T H media proportionalis inter partem T S et totam T K, hæc recta inter reliquas proportionalis erit motui medio Solis a nodo.



" Describatur enim circulus N K n M centro T et radio T K, eodemque centro et semi-axibus T H et T N describatur ellipsis N H n L, et in tempore quo Sol a nodo recedit per arcum N a, si ducatur recta T b a, area sectoris N T a exponet summam motuum nodi et Solis in eodem tempore. Sit igitur arcus a A quàm minimus quem recta T b a præfatâ lege revolvens in datâ temporis particulâ uniformiter describit, et sector quàm minimus T A a erit ut summa velocitatum quâ Sol et nodus tum temporis seorsim feruntur. Solis autem velocitas ferè uniformis est, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hujus summæ, nempe velocitas nodi in mediocri suâ quantitate augetur in recessu a syzygiis in duplicatâ ratione sinûs distantiæ ejus a Sole; per Corol. Prop. XXXI. Lib. III. Princip. et cùm maxima est in quadraturis ad Solem in K, (b) eamdem rationem obtinet ad Solis velocitatem ac ea quam habet S K ad T S hoc est (c) ut (differentia quadratorum ex T K et T H vel) (d) rectangulum K H M ad T H quadratum. Sed ellipsis N B H dividit sectorem A T a summæ harum duarum velocitatem exponentem, in duas partes A B b a et B T b ipsis velocitatibus proportionales. Producatur enim B T ad circulum in β, et a puncto B demittatur ad axem majorem perpendicularis B G, quæ utrinque producta occurrat circulo in punctis F et f, (e) et

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per constructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex T K et T H — ad T H quadratum.* Est ex constructione T K ad T H ut T H ad T S, est ergo $T K^2$ ad $T H^2$ ut T K ad T S et dividendo $T K^2 - T H^2$ ad $T H^2$ ut T K — T S sive S K ad T S.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex T K et T H vel rectangulum K H M.* Est enim $T K^2 - T H^2 = K H \times H M$, per Prop. V. Lib. II. Elem. Euclidis.

(e) * *Et quoniam spatium A B b a,* &c. Sector T A a est ad sectorem T B b ut $A T^2$ ad $B T^2$, (quia propter parvitatem anguli A T a, non differt sensibiliter sector B T b ab eo qui quoniam spatium A B b a est ad sectorem T B b ut rectangulum A B β ad B T quadratum (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex T A et T B ob rectam A β æqualiter et inæqualiter sectam in T et B.) Hæc igitur ratio ubi spatium A B b a maximum est in K, eadem erit ac ratio rectanguli K H M ad H T quadratum, sed maxima nodi mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hâc ratione. Igitur in quadraturis sector A T a dividitur in partes velocitatibus proportionales. (f) Et quoniam rectang. K H M est ad H T quadr. ut F B f ad B G quad. (g) et rectangulum A B β æquatur rectangulo F B f. Erit igitur areola A B b a ubi maxima est ad reliquum sectorem T B b, ut rectang. A B β ad B G quadr. Sed ratio harum areolarum semper erat ut A B β rectang. ad B T quadratum; et propterea areola A B b a in loco A minor est simili areola in quadraturis, in duplicatâ ratione B G ad B T hoc est in duplicatâ ratione sinus distantiæ Solis a nodo. Et proinde summa omnium areolarum A B b a nempe spatium A B N erit ut motus nodi in tempore quo Sol digreditur a nodo per arcum N A. Et spatium reliquum nempe sector ellipticus N T B erit ut motus Solis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, is est qui fit in tempore quo Sol periodum suam absolverit, motus nodi medius a Sole erit ad motum ipsius Solis medium, ut area circuli ad aream ellipseos, hoc est ut recta T K ad rectam T H mediam scilicet proportionalem inter T K et T S; vel quod eodem redit ut media proportionalis T H ad rectam T S.

inter lineas A T, a T interciperetur et terminaretur arcu circuli centro T, radio T B descripti). Dividendo autem est T A a — T B b sive A B b a ad T B b ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; est verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. II. Lib. El.) ergo *A B b a ad T B b ut A B β ad B T quadratum.*

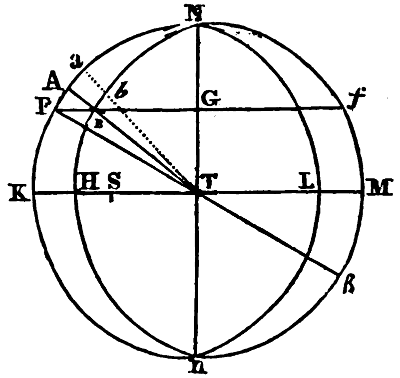
(f) * *Et quoniam rectangulum K H M est ad H T quad. ut F B f ad B G quad.* Ex natura ellipseos et circuli circumscripti, est KT ad HT ut F G ad B G, et quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, et dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut EG^2 ad BG^2, sed (per 5. Lib. II. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ et $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo K H M ad HT^2 ut F B f ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum $AB\beta = FBf$* (per 35. III. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi potest; area A B b a ubi maxima est, est ad T B b ut A B β ad BG^2 ergo ubi maxima est A B b a est $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area A B b a est ad T B b ut A B β ad BT^2, ergo illis in locis est $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, est ergo area A B b a ubi maxima est ad aream A B b a in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ sive quia motus Solis qui per aream T B b exprimitur est ubique idem, est area A B b a ubi maxima est ad aream A B b a in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ sive ut BT^2 ad BG^2, sed in triangulo B T G est B T ad B G ut sinus anguli recti G ad sinum anguli B T G per principia trigonom. et distantia Solis a nodo ubi area A B b a est maxima, nempe in K, mensuratur per angulum rectum, et ubi est in loco quovis A per angulum B T G, ergo area AB b a ubi maxima est, est ad aream A B b a in alio quovis loco ut quadrata sinuum distantiæ Solis a nodo in utrovis loco, sed in eâ sunt ratione motus nodorum in iis distantiis; ergo ut est area A B b a ubi maxima est ad motum nodi in eo loco, ita est area A B b a in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, sed ubi area A B b a maxima est, est ad motum nodi ut B T b ad motum Solis, ergo cùm areæ B T b et motus Solis ubique eadem maneant, est etiam in quovis loco area A B b a ad motum nodi ut area B T b ad motum Solis sive alternando est ubique AB b a ad B T b ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde summa omnium A B b a,* &c.

PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio nodorum Lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus A distantia Solis a loco nodi medio, sive motus medius Solis a nodo. Tum si capiatur angulus B cujus tangens sit ad tangentem anguli A ut T H ad T K, hoc est in subduplicatâ ratione motûs mediocris horarii Solis ad motum mediocrem horarium Solis a nodo in quadraturis versante; erit idem angulus B distantia Solis a loco nodi vero. Nam jungatur F T et ex demonstratione Propositionis superioris (h) erit angulus F T N distantia Solis a loco nodi medio, angulus autem A T N distantia a loco vero, et tangentes horum angulorum sunt inter se ut T K ad T H.



" *Corol.* Hinc angulus F T A est æquatio nodorum Lunæ, (i) sinusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est ad radium ut K H ad T K + T H. (k) Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio

(h) * *Erit angulus F T N distantia Solis a loco nodi medio.* Cùm circulus N K n M repræsentet totum motum Solis a nodo inter syzygias proximas cum eodem nodo, sectores ejus circuli ut F T N repræsentabunt motum medium Solis a nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut erit is sector assumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat ellipsi in B, cumque sectores elliptici B T N repræsentent Solis motum qui uniformis supponitur, ii sectores B T N sunt proportionales tempori; sed sector ellipticus B T N erit, ex natura ellipseos et circuli circumscripti, ad totam ellipsim ut sector circularis F T N ad totum circulum, ideóque tempus quo Solis motus repræsentabitur per B T N erit idem ac tempus quo Sol a nodis recesserit motu medio repræsentato per F T N, sed dum Sol describit sectorem B T N, vero motu recedit a nodo sectore N T A, per dem. Prop. super. ergo sector F T N repræsentat medium motum Solis a nodo, eo tempore quo verus ejus a nodo motus repræsentari debet per N T A, ergo medius motus est ad verum ut angulus T N ad angulum A T N, tangentes autem horum angulorum, sumendo T G pro radio, sunt F G et B G, et F G est ad B G ut K T ad K H ex naturâ circuli et ellipseos.

(i) * *Sinusque hujus anguli in octantibus est ad radium ut K H ad T K + T H.* Ex principiis trigonometricis, est sinus hujus anguli F T A qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum anguli T F G, qui in hoc casu est 45^{gr}. (cujus ergo sinus est T A $\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est F B ad B T, sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 sive tollendo fractionem, est quadr. sinûs æquationis quæsitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, sed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ et in octantibus est $TG =$ FG sive $BG + BF$ cujus quad. est $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ et $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus radix quadrata (negligendo BF^2) est $2BG + BF = FG + BG$: ergo tandem cùm sit quad. sinûs æquationis quæsitæ ad TA^2 ut est FB^2 ad $2BT^2$; radices quadratas omnium terminorum sumendo est sinus æquationis ad T A sive ad radium ut est F B ad F G + B G, sed est B F ad F G + B G ut K H ad T K + T H, hinc tandem, sinus æquationis maximæ est ad radium ut K H ad T K + T H.

(k) * *Sinus autem æquationis in loco quovis alio*, &c. Ut hoc commodè demonstretur, hoc Lemma adhibendum est.

A est ad sinum maximum, ut sinus summæ angulorum F T N + A T N ad radium: hoc est ferè ut sinus duplæ distantiæ Solis a loco nodi medio (nempe 2 F T N) ad radium.

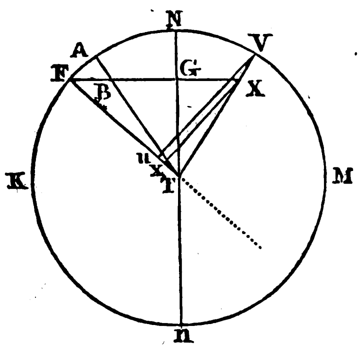
Scholium.

" Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis sit 16″. 16‴. 37^iv. 42^v. hoc est in anno toto sidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. (1) erit T H ad T K in subduplicatâ ratione numeri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc est ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea T H ad H K ut 18,6524761 ad 1. hoc est ut motus Solis in anno sidereo ad motum nodi medium 19°. 18′. 1″. $23\frac{2}{3}$‴.

" At si motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis sit 360°. 50′. 15″. sicut ex observationibus in theoriâ Lunæ adhibitis deducitur, motus medius nodorum in anno sidereo erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et T H erit ad H K ut 360^gr. ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc est ut 18,61214 ad 1. unde

In circulo quovis N K n M sumatur arcus N F ejusque sinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ secet hunc sinum in B, dico quod sinus summæ angulorum F T N, A T N erit ad T G cosinum anguli assumpti F T N, ut summa linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N sumatur arcus N V = N A, ducatur T V et producatur F G quæ



occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto si opus est, ducantur, in ipsum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex constructione, lineam B T esse æqualem lineæ X T, lineam G X esse æqualem lineæ B G, ideóque totam F X esse æqualem summæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u esse sinum arcus F V qui est summa arcuum N F et N V sive N A, et propter triangula F X x, F T G similia, ob angulum F communem et rectos x et G est T F ad T G ut F X ad X x, et propter triangula similia u V T, x X T esse V u ad T V sive T F ut X x ad T X sive B T; unde ex perturbato ordine sit V u ad T G ut F X sive F G + B G ad B T; est itaque $B\,T = \frac{(F\,G + B\,G)\,T\,G}{V\,u}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur sinum æquationis in quovis loco esse ad sinum æquationis maximæ ut sinus summæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex principiis trigonometricis, est sinus æquationis quæsitæ sive sinus anguli F T B ad sinum anguli F (qui est T G cosinus nempe anguli F T N) ut est B F ad B T hoc est, ut est B F ad $\frac{(F\,G + B\,G)\,T\,G}{V\,u}$ per Lemma; ducatur uterque consequens in $\frac{V\,u}{T\,G}$ fiet sinus æquationis quæsitæ ad V u qui est sinus summæ angulorum F T N + A T N ut B F ad F G + B G, sed ex notâ præcedenti est B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, et est K H ad T K + T H ut sinus æquationis maximæ ad radium; hinc tandem, sinus æquationis cujusvis ad sinum summæ angulorum F T N + A T N, ut sinus æquationis maximæ ad radium.

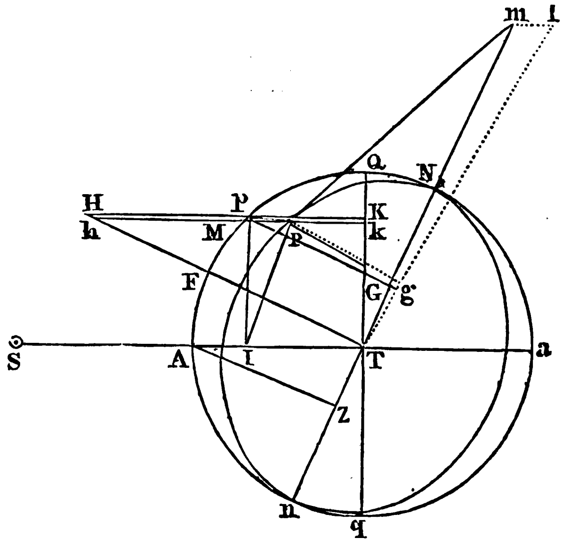
(1) * *Erit T H ad T K in subduplicatâ ratione,* &c. Est T S ad S K ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc est, ut 360. ad 39^gr. 38′. 7″. 50‴. sive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo est T S ad T K ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo T H media proportionalis inter T S et T K, *est ad T K in subduplicatâ ratione,* &c. Reliqua hujus scholii similibus calculis deducuntur, qui faciliores sunt quàm ut plenius explicentur.

motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet $16''. 18'''. 48^{iv}$. Et æquatio nodorum maxima in octantibus $1^{\circ}. 29'. 57''$."

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum eclipticæ.

Designent A et a syzygias; Q et q quadraturas; N et n nodos; P locum Lunæ in orbe suo; p vestigium loci illius in plano eclipticæ, et m T l motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam T m



demittatur perpendiculum P G, p G et producatur ea donec occurrat T l in g, et jungatur etiam P g: erit angulus P G p inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi Luna versatur in P; et angulus P g p inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideóque angulus P P g variatio momentanea inclinationis. (m) Est autem hic angulus

(m) *Est autem angulus G P g ad angulum.* In triangulo P G g, sinus anguli G P g est ad lineam G g, ut sinus anguli P G g ad P G (sive P G, nam P g et P G quam minimum differunt) si verò P G assumatur pro radio, sinus anguli P G g est P p, ergo sinus anguli G P g est ad G g ut P p ad P G.

In triangulo G T g, est G g ad sinum anguli G T g ut T g sive T G ipsi proximè æqualis ad sinum anguli recti in G qui est radius pro quo P G hic assumitur; ergo ex æquo, sinus anguli G P g est ad sinum anguli G T g ut T G ad P G et P p ad P G conjunctim, et quia sinus parvorum angulorum sunt ut ipsi anguli, est *angulus G P g ad angulum*, &c.

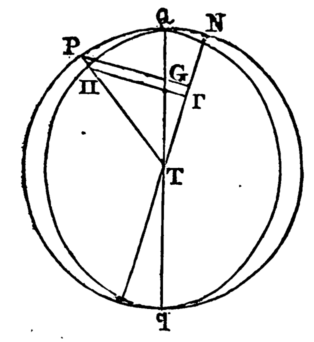
G P g ad angulum G T g ut T G ad P G et P p ad P G conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cùm angulus G T g (per Prop. XXX.) sit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $I\,T \times P\,G \times A\,Z$ ad A T cub. erit angulus G P g (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33''. 10'''. 3^{iv}$. ut $I\,T \times A\,Z \times T\,G \times \frac{P\,p}{P\,G}$ ad A T cub. Q. e. i.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod Luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad N n erigatur perpendiculum T F, sitque p M motus horarius Lunæ in plano eclipticæ; et perpendicula p K, M k in Q T demissa et utrinque producta occurrant T F in H et h: (o) erit I T ad A T ut K k ad M p, et T G ad H p ut T Z ad A T, ideóque $I\,T \times T\,G$ æquale $\frac{K\,k \times H\,p \times T\,Z}{M\,p}$, hoc est, æquale areæ H p M h ductæ in rationem $\frac{T\,Z}{M\,p}$: et propterea inclinationis variatio horaria ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut H p M h ducta in $A\,Z \times \frac{T\,Z}{M\,p} \times \frac{P\,p}{P\,G}$ ad A T cub.

Corol. 2. Ideóque si Terra et nodi singulis horis completis retraherentur a locis suis novis, et in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex Propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad

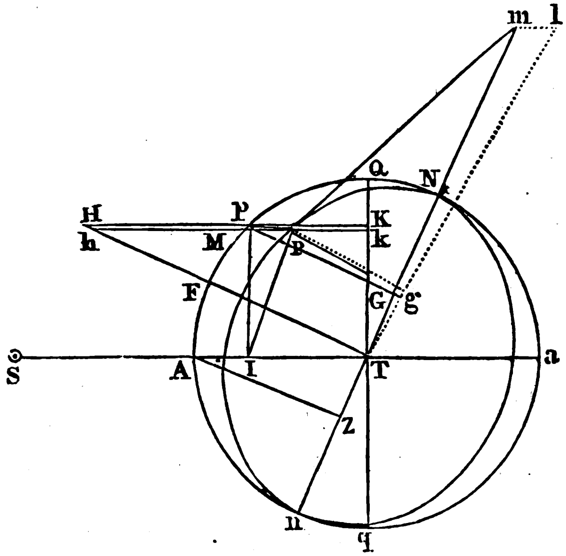


motum nodorum ut P p ad P G (sive ut sinus inclinationis plani ad radium) et ut PG ad TG; sumatur Π in ellipsi ad eamdem distantiam a modo ac P in circulo, ratio P G ad T G eadem erit ac radio Π Γ ad T Γ, per constructionem cùm autem hic agatur de quantitate mediocri, sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de plano elliptico sive de plano circulari; ergo variatio inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano elliptico sive de plano circulari; sed motus nodorum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

(o) * *Erit I T ad A T ut K k ad M p.* Est, ex naturâ circuli, ordinata p K cui æqualis est I T ad radium A T, ut fluxio abscissæ K k ad fluxionem arcûs M p, *et T G ad H p ut T Z ad A T,* producatur H p K ita ut occurrat lineæ N n in D, propter parallelas, HD, AT et HT, A Z per constructionem, est D T ad H D ut T Z ad A T, est pariter eamdem ob rationem D G ad p D ut T Z ad A T, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis *est T G ad H p ut T Z ad A T.*

inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad 33″. 10‴. 33$^{\text{iv}}$., (^{p}) ut aggregatum omnium arearum H p M h, in revolutione puncti p genitarum, et sub signis propriis + et — conjunctarum, ductum in A Z × T Z ×



$\frac{\text{P p}}{\text{P G}}$ ad M p × A T cub. (^{q}) id est, ut circulus totus Q A q a ductus in A Z × T Z × $\frac{\text{P p}}{\text{P G}}$ ad M p × A T cub. (^{r}) hoc est, ut circumferentia Q A q a ducta in A Z × T Z × $\frac{\text{P p}}{\text{P G}}$ ad 2 M p × A T quad.

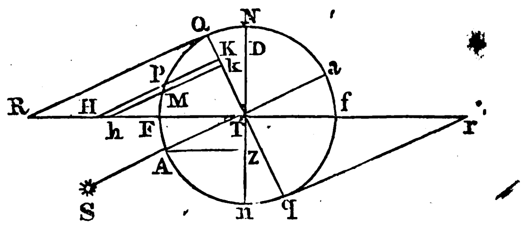
(^{p}) * *Ut aggregatum omnium arearum H p M h sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea M H sumitur in eamdem partem ac linea M K aut in partem oppositam; priore casu area H p M h signo affirmativo est afficienda, posteriore negativo.

(^{q}) * *Id est, ut circulus totus Q A q a,* &c. Liquet ex ipsâ constructione, quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ H p M H constituunt aream positivam F A n q r f T F, dum ex q ad f procedit, areæ H p M h constituunt aream negativam q r f, quæ ex priori detracta relinquit semi-circulum F n f.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q, areæ H p M h efficiunt aream positivam f a N Q R F T f et dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam Q R F quæ ex priori detracta relinquit semi-circulum f N F.

Itaque omnes areæ H p M h sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum Q A q a.

Cæterum observandum variationem inclinationis esse positivam aut negativam, hoc est



crescere aut decrescere secundum signa quantitatis A Z × T Z de quibus in Corol. proximo dicemus.

(^{r}) * *Ut circulus totus Q A q a ductus in A Z*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad 33″. 10‴. 33^iv. ut $A\,Z \times T\,Z \times \frac{P\,p}{P\,G}$ ad 2 A T q sive ut $P\,p \times \frac{A\,Z \times T\,Z}{\frac{1}{2}A\,T}$ ad $P\,G \times 4\,A\,T$, id est (cùm P p sit ad P G ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, et $\frac{A\,Z \times T\,Z}{\frac{1}{2}A\,T}$ sit ad 4 A T (*) ut

$\times\, T\,Z \times \frac{P\,p}{P\,G}$ ad $M\,p \times A\,T$ cub. Si in hac ratione loco circuli Q A q a, ponatur ejus valor qui est circumferentia Q A q a ductâ in dimidium radii seu in $\frac{A\,T}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $Q\,A\,q\,a \times \frac{A\,T}{2} \times A\,Z \times T\,Z \times \frac{P\,p}{P\,G}$ ad $M\,p \times A\,T$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2. et dividatur per A T, non mutabitur ratio et fiet *ut circumferentia Q A q a ducta in* $A\,Z \times T\,Z \times \frac{P\,p}{P\,G}$ *ad* $M\,p \times A\,T$ *qu.*

(*) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli A T n sive A T N, cujus sinus est A Z et cosinus T Z, est $\frac{2\,A\,Z \times T\,Z}{A\,T}$ sive $\frac{A\,Z \times T\,Z}{\frac{1}{2}A\,T}$.

Quando autem duplum anguli A T N excedit semi-circulum, sive quando angulus A T N est rectus, signum sinus dupli anguli A T N, fit negativum ex positivo; quando angulus A T N excedit 180^gr. signum sinûs ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus a quadraturâ Q ab oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, et denique augetur dum a quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut inclinationis angulus sit minimus cùm nodi in quadraturis Q et q versantur, maximus verò cùm nodi sunt in syzygiis A et a; quæ lex ab astronomis est observata, sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A et ultimam quadraturam Q, ductâque F T f perpendiculari in lineam nodorum, dum Luna movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream N A F T h, cùmque Luna versetur inter nodum et remotiorem quadraturam, motus nodi erit regressivus, ideóque cùm linea Y T fiat semper remotior a Lunâ quàm linea N T (punctum Y quod hic exaratum non est designat novum locum in quem nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam T Y relatus minor erit quàm si ad T N referretur, area ergo N A F T h designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed productâ lineâ Y T, ejus productio erit vicinior Lunæ in area F q existenti quàm productio lineæ N T, ideóque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ T Y relatus major erit quàm si ad lineam T n referretur, sed hoc in casu area F R q designat inclinationis variationem, ergo area F A q designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus et ex N in Y migrat, et lineæ Y T productio remotior est a Lunâ in areâ n f versante quàm productio lineæ N T, ideo angulus inclinationis minor erit quàm si ad lineam T n referretur; ea verò variationis mutatio designatur per aream H n a f quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab *f* ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam T Y; totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Q f r, sed a Q ad n, cùm motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad T I, minuitur is angulus, totaque imminutio designatur per aream N h r Q.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas N A F h, q n H R, H n a f et N h r Q, quarum prima et ultima efficiunt Q A F T r, duæ mediæ aream q a f F R.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas F R q et Q f r, quarum hæc detracta ex area Q A F T r relinquit semi-circulum Q A F f, prior detracta ex areæ q a f T R relinquit semi-circulum q a f F ideóque circulus totus Q A q a designat imminutionem anguli inclinationis cùm nodus versatur in quovis puncto N quadrantis A Q.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Q a, ex iis deprehendetur circulum Q A q a designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante a q versetur; omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideóque etiam ostendetur circulum Q A q a imminutionem anguli inclinationis designare; et pariter ubi nodus erit in quadrante q A casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum nodus procedit ab A ad Q, tumque est sinus duplicati anguli A T n ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $I T \times A Z \times T G \times \frac{P p}{P G}$ ad A T cub. (t) id est, ut $\frac{I T \times T G}{\frac{1}{2} A T} \times \frac{P p}{P G}$ ad 2 A T; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ductis in $\frac{P p}{P G}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ nodorum transit a quadraturâ ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}., seu 5878″., ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{P p}{P G}$ ad summam totidem diametrorum; (u) hoc est, ut diameter ducta in $\frac{P p}{P G}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit 5^{gr}. 1′., ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163″, seu 2′. 43″.

minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima, indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

(t) * *Id est.* Ubi nodi versantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quarè $I T \times A Z \times T G \times \frac{P p}{P G}$ est ad A T cub. ut $I T \times A T \times T G \times \frac{P p}{P G}$ ad A T cub. sivè ut $I T \times T G \times \frac{P p}{P G}$ ad A T^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ A T, ut $I T \times \frac{T G}{\frac{1}{2} A T} \times \frac{P p}{P G}$ ad 2 A T.

(u) 121. * *Hoc est ut diameter.* Sit T I vel p K = y. radius Q T = 1, erit T K = $\sqrt{1 - y y}$, ex naturâ circuli, et T K = T G quia in hoc casu recta n N coincidit cum Q q, cùm nempe nodi versentur in quadraturis; ac proindè sinus duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis, id est $\frac{I T \times T G}{\frac{1}{2} A T} = 2 y \times \sqrt{1 - y^2}$. Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus sinubus distantiæ duplicatæ, multiplicari debet sinus variabilis $2 y \times \sqrt{1 - y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc est, per $\frac{d y}{\sqrt{1 - y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæsitæ = 2 y d y, sumptisque fluentibus, prodit area tota = y^2, factâ autem y = 1, erit area illa ubi Luna pergit a quadraturâ ad syzygiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur summa totidem diametrorum multiplicandus est quadrans circuli per totam diametrum. Hinc si radius dicatur r, peripheria p, erit summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis, quo tempore Luna transit a quadraturâ ad syzygiam ad summam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2 r}{4}$, sivè ut 2 r ad p, hoc est, ut diameter ad circumferentiam.

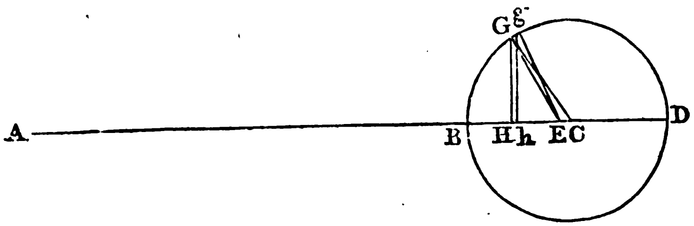
Si autem inclinatio sit 5^{gr}. 1′. Erit sinus P p, huic inclinationi respondens, ad radium P G, ut 874 ad 10000, (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quarè summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ a quadraturis ducta in $\frac{P p}{P G}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna a quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad oppositionem vadit, augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis et decrementis ut nulla sensibilis supersit inclinationis mutatio, quâtenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit A D sinus inclinationis maximæ, et A B sinus inclinationis minimæ. Bisecetur B D in C, et centro C, intervallo B C describatur circulus B G D. In A C capiatur C E in eâ ratione ad E B quam E B habet ad 2 B A: et si dato tempore constituatur angulus A E G æqualis duplicatæ distantiæ nodorum a quadraturis, et ad A D demittatur perpendiculum G H: erit A H sinus inclinationis quæsitæ.

Nam G E q æquale est G H q + H E q = (x) B H D + H E q = H B D + H E q — B H q = H B D + B E q — 2 B H × B E =



B E q + 2 E C × B H = 2 E C × A B + 2 E C × B H = 2 E C × A H. Ideóque cùm 2 E C detur, est G E q ut A H. Designet jam A E g duplicatam distantiam nodorum a quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, et arcus G g ob datum angulum G E g erit ut distantia G E. (y) Est autem H h ad G g ut G H ad G C, et propterea H h est ut contentum G H × G g, seu G H × G E; id est ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut A H et sinus anguli A E G conjunctim. Igitur si A H in casu aliquo sit sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, et propterea sinui illi æqualis semper manebit. (z) Sed A H, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic sinui æqualis est, et propterea eidem semper æqualis manet. Q. e. d.

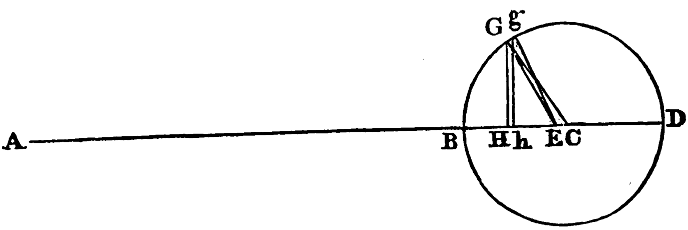
In hâc demonstratione supposui angulum B E G, qui est duplicata

(x) * = *B H D + H E q.* (Prop. V. Lib. II. Elem.) = H B D + H E q — B H q (per Prop. III. Lib. II. Elem.) = H B D + B E q — 2 B H × B E (Prop. VII. ejusdem Lib.) = B E q + 2 E C × B H (ob B D = 2 E C + 2 B E). Est autem (per constr.) EB^2 = 2 E C × B A; quare B E q + 2 E C × B H = 2 E C × A B + 2 E C × B H.

(y) * *Est autem H h ad G g.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed A H.* (Per constr.)

distantia nodorum a quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum B E G rectum esse, et in hoc casu G g esse augmentum horarium duplæ distantiæ nodorum et Solis ab invicem, et inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. (a) ut contentum sub inclinationis sinu A H et sinu anguli recti B E G, qui est duplicata distantia nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus A H ad radium quadruplicatum; hoc



est (cùm inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{gr}.8'\frac{1}{2}$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem variatio tota, sinuum differentiæ B D respondens, ad variationem illam horariam (b) ut diameter B D ad arcum G g; id est, ut diameter B D ad semicircumferentiam B G D et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$ quo nodus pergit a quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 et $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota B D ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, et inde variatio illa B D prodibit $16', 23\frac{1}{2}''$.

Hæc est inclinationis variatio maxima quatenus locus Lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si nodi in syzygiis versantur, (c) nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si nodi in quadraturis consistunt,

(a) * *Ut contentum sub inclinationis sinu A H, et sinu anguli recti B E G*, hoc est, ut contentum sub mediocris inclinationis sinu A H (quia in hoc casu A H = A C) et radio *ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus A H, ad radium quadruplicatum.*

(b) * *Ut diameter B D ad arcum G g.* Nam, in hâc constructione, variatio tota sinuum differentiæ B D respondens per diametrum B D exprimitur, et H h est incrementum sinus inclinationis tempore quod per G g designatur, sive horæ tempore; sed ubi punctum H cadit in centro C, et punctum G in medio semi-circuli, tunc est G g = H h; ergo, est diameter B D ad arcum G g ut variatio tota ad variationem horariam in octantibus; sed ut sunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit a quadraturâ ad syzygiam ad unam horam, ita semi-circumferentia B G D ad G g, est ergo $G g = \frac{B G D \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$, ideóque variatio tota est ad variationem horariam in octantibus ut B D ad $\frac{B G D \times 1^h}{2079\frac{7}{10}{}^h}$ sive ut B D ad B G D et $2079\frac{7}{10}{}^h$ ad 1^h conjunctim.

(c) * *Nil mutatur ex vario situ Lunæ.* Nam ex demonstratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria est ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $I T \times A Z \times T G \times \frac{P p}{P G}$ ad A T cub. sed nodis versantibus in syzygiis fit A Z = o quare quantitas $I T \times A Z \times T G \times \frac{P p}{P G}$

inclinatio minor est ubi Luna versatur in syzygiis, quam ubi ea versatur in quadraturis, excessu 2'. 43".; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessûs dimidio 1'. $21\frac{1}{2}$". variatio tota mediocris B D in quadraturis lunaribus diminuta fit 15'. 2"., in ipsius autem syzygiis aucta fit 17'. 43". Si Luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias erit 17'. 45".: ideóque si inclinatio, ubi nodi in syzygiis versantur, sit 5^{gr}. 17'. 20".; eadem, ubi nodi sunt in quadraturis, et Luna in syzygiis, erit 4^{gr}. 59'. 35". Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

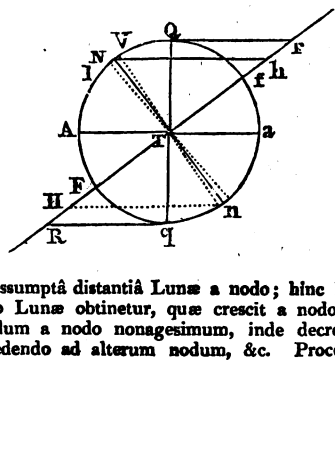
Si jam desideretur orbis inclinatio illa, (d) ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur; fiat A B ad A D ut sinus graduum 4. 59'. 35". ad sinum graduum 5. 17'. 20"., et capiatur angulus A E G æqualis duplicatæ distantiæ nodorum a quadraturis; et erit A H sinus inclinationis quæsitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat 90^{gr}. a nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, (f) in calculo latitudinis Lunæ compensatur, et quo-

fit etiam o, evanescit itaque hoc in casu horaria variatio, ideóque in vario situ Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipsâ rei naturâ, nam versantibus in syzygiis, sive Sole existente in lineâ nodorum, Sol est in eo plano in quo jacet linea nodorum, sed linea nodorum est in plano orbitæ lunaris, ergo Sol in ipsâ orbitâ lunari productâ positus censeri potest, ac per consequens qualiscumque sit ejus actio in Lunam, ipsam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in syzygiis et nodi ubivis versantur.* Nam dum Luna ab unâ syzygiâ ad eamdem syzygiam redit, tota variatio menstrua est ad 33". 10"'. 33^{iv}. ut $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad 2 A T q, sive ut ex Cor. 3. Prop. præcedentis constat ut inclinationis sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodi a Sole ad quadruplum quadratum radii, sed per hujus Probl. constructionem in eâ ratione est A H, si modò A B sit ut sinus minimæ inclinationis et A D sinus maximæ, sed 4^{gr}. 59'. 35". est minimus inclinationis angulus ubi Luna est in syzygiis et 5^{gr}. 17'. 20". est maximus. *Ergo fiat A B ad A D ut sinus graduum 4^{gr}. 59'. 35".*, &c.

(e) *Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat. 90^{gr}. a nodis.* Minima inclinatio ubi Luna distat 90^{gr}. a nodis est ubi nodi sunt in quadraturis, nonagesimus autem a nodis gradus incidit in ipsam syzygiam, itaque minima inclinatio eadem est ac in præcedenti casu; maxima verò inclinatio est cùm nodi sunt in ipsis syzygiis, et nonagesimus a nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, sed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario situ Lunæ, itaque eadem est, sive Luna in syzygiis sive in quadraturis versetur, eadem ergo est iterum maxima inclinatio ac in casu præcedenti, ideóque in hoc casu A B et A D eadem assumenda sunt ac in casu præcedenti: reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditûs Lunæ ad nonagesimum a nodo gradum brevior sit tempore ejus reditûs ad syzygiam sive mense synodico, siquidem mense periodico etiam brevior est, tamen hic casus ad fictionem Corollarii secundi magis accedit, in quo nempe supponitur nodum toto mense sensibilem viam non esse emensum, quod quidem accuratius dicetur si assumatur reditus Lunæ ad eumdem situm respectu nodi; hic ergo eadem constructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

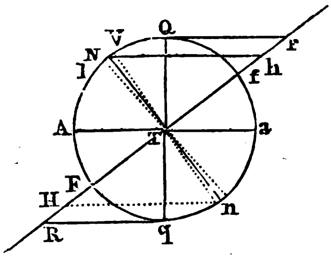
(f) * *In calculo latitudinis compensatur, et quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, positâ inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ,



et assumptâ distantiâ Lunæ a nodo; hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ crescit a nodo ad gradum a nodo nonagesimum, inde decrescit accedendo ad alterum nodum, &c. Procedat dammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus nodorum (ut supra diximus) ideóque in calculo latitudinis illius negligi potest.

([g]) *Scholium.*

ergo Luna a nodo N ad punctum F 90[gr]. a nodo dissitum, motus medius nodi est major motu vero, toto eo intervallo, ut superius (ad Prop. XXXII.) ostensum est, ergo assumptâ mediocri distantiâ a nodo quæ verâ major est, et mediocri inclinatione quæ convenit illi mensi, latitudo



major invenietur quàm debuisset; sed quoniam in casu istius figuræ minuitur angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, et is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cùm Luna est in F circiter, quia area N F h est ferè semi-circulo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quàm is qui per inclinationem mediocrem supponitur, unde latitudo vera major evadit quàm ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motûs mediocris loco motûs veri assumitur, invenitur latitudo major vera, sed ex eo quod inclinatio mediocris assumitur loco veræ, invenitur latitudo minor verâ; inæqualitates itaque menstruæ, quas variatio inclinationis et motus nodorum admittunt, sese mutuo compensant in calculo latitudinis. Cæteri casus eamdem compensationem suppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur, motus verus nodi est minor motu vero, hinc Luna est reverâ remotior a nodo quàm statuitur per motum medium nodi, ideóque latitudo major supponitur quàm est (quia in secundo quadrante a nodo quò propior est Luna a nodo ascendente N, ideóque eo remotior a descendente n, eò ejus latitudo est major) sed cùm orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem, augetur is angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideóque assumendo eam inclinationem mediocrem, minor obtinetur latitudo quàm reverâ est, ergo, propter inæqualitatem motûs nodi, latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur, est major verâ, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri est minor verâ, compensantur ergo errores, &c.

([g]) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex æquationibus lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati, et methodos aperuimus quibus ex gravitatis theoriâ eas æquationes deducere liceat; quantum fieri potuit iisdem usi sumus methodis quas Newtono familiares fuisse constat, et ad ejus solutiones proxime nos accessisse percipient viri docti cùm paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster, et ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit; utrum aliis methodis res felicius absolvi potuerit, viderint doctiores; speramus tamen hos calculos, ut legitimis principiis nixos, lectoribus nostris gratos fore, et forte eos juvare ut melius quid excogitent: cæterum hoc scholium in quinque paragraphos commode distribui potest; in primo Newtonus indicat calculum ejus æquationis Lunæ, quæ æquatio solaris prima dicitur: in secundo, tradit æquationes solares motûs nodorum et apogæi Lunæ; in tertio illam æquationis solaris correctionem tradit quæ ab excentricitate orbitæ lunaris pendet; in quarto aliam adhuc correctionem æquationis solaris addit, quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ; in quinto denique agit de æquationibus motûs Lunæ et ejus apogæi, quæ pendent ex situ apogæi Lunæ respectu Solis.

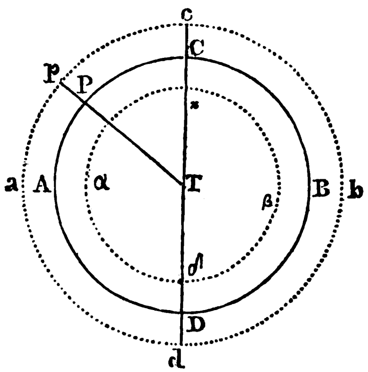
Ut autem hæc omnia et potissimum ea quæ æquationem solarem Lunæ spectant, et quæ primo, tertio et quarto paragrapho a Newtono indicantur, meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

De incremento motûs medii Lunæ, et ejus æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in hypothesi orbem Lunæ esse ellipticum. Denique in orbe lunari ad eclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo A D B C circa corpus T a quo retineatur per vim decrescentem secundùm quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P a corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi radiorum T p, T P; dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.

Nam fingatur eam vim extraneam non esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P a circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantiâ ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; verùm quoniam ab initio vis illa extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit, ea vis plus imminuebat vim centralem quàm ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideóque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam



cubi distantiarum; perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, et angulus curvæ cum radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is angulus a tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curvâ rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cùm autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim centralem minus minuet quàm secundum cubum distantiarum; itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quàm si logarithmica spiralis describeretur, et tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulum a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quàm ut circulus describi possit, quod sic demonstrari potest; areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.) ideóque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia a centro seu ipse radius, et is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseverasset, nullaque vis extranea accessisset inversè ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per radios) forent inversè ut cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum a d b c, minus decrescit quàm secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcûs descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundùm rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur, major est illâ quæ obtineretur si circulus in eo loco describeretur; ergo corpus P a tangente magis discedit versus centrum quàm si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; cùm autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum radio, iterum augetur, donec is angulus rectus evadat, inde verò fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quàm ut corpus P in circulo moveri pergat; redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in logarithmicâ spirali cum hoc motu: sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur, eò illæ alternæ oscillationes minus a circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fieri. Q. e. d.

Cor. 1. Si vis illa extranea et constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, in tali distantiâ a centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo A D B C inversè ut cubi radiorum circulorum A D B C, $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ oscillatur, et si ea vis extranea sit exigua, censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret, sed cresceret secundùm aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T p paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus, et quidem unam aut alteram methodum ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THEOR. II.

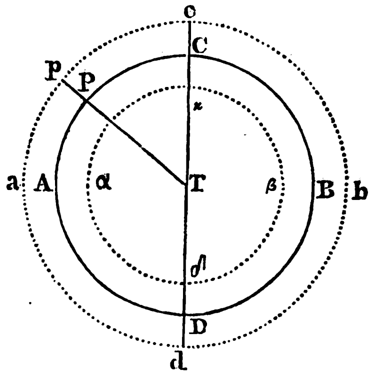
Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r radius circuli A D B C, sit ϱ radius circuli a d b c, vel $\alpha\ \delta\ \beta\ \kappa$, sit p radiorum r et ϱ differentia; vis corporis T in distantiâ r dicatur V et in eadem distantiâ vis extranea dicatur Y quæ crescat ut distantiæ a centro T et quæ positiva censeatur si distrahat corpus P a centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod radius ϱ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r\times(1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}+\frac{16Y^3}{V^3}$, &c.) et omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = r\times(1+\frac{Y}{V})$.

Nam vis corporis T in distantia ϱ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}V$ vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}Y$ ex hypoth., ideóque vis quâ circulus a d b c (vel α δ β κ) describitur est $\frac{rr}{\varrho\varrho}V - \frac{\varrho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A C B D describitur inversè ut cubi radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præced.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3} = \frac{V}{r\varrho^2} - \frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\varrho^4 Y = r^3V\times\overline{\varrho - r} = \pm r^3pV$. Loco ϱ scribatur $r \pm p$ fiet $r^4Y \pm 4r^3pY + 6r^2p^2Y \pm 4rp^3Y + p^4Y = \pm r^3pV$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est, fit $r^4Y \pm 4r^3pY = \pm r^3pV$, sive $\pm pV \mp 4pY = rY$, unde obtinetur $\pm p = \frac{rY}{V-4Y}$; ideóque ϱ, quod est $r \pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem reductus est $r\times(1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$, &c).sive $r\times(1+\frac{Y}{V})$.

THEOR. III.

Dicatur M tempus periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus tempus periodicum in circulo a d b c (vel α δ β κ) erit $M\times(1+\frac{2Y}{V})$.

Dem. Tempus periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c (vel α δ β κ) propter vim extraneam Y detractam vel additam, est ad tempus periodicum ejus corporis P cùm revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϱ ad quadratum radii r; nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales, quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c (vel α δ β κ) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel α δ β κ) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel α δ β κ) ad totam aream circuli A D B C, ideóque ut quadrata radiorum ϱ et r, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{\overline{V-3Y}|^2}{\overline{V-4Y}|^2}rr$ ad r r, ideóque ut $\frac{\overline{V-3Y}|^2}{\overline{V-4Y}|^2}$ ad 1. sed hâc fractione in seriem resoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$, &c. &c. quæ series valde convergit propter exiguitatem istiuc fractionis $\frac{Y}{V}$ et illius



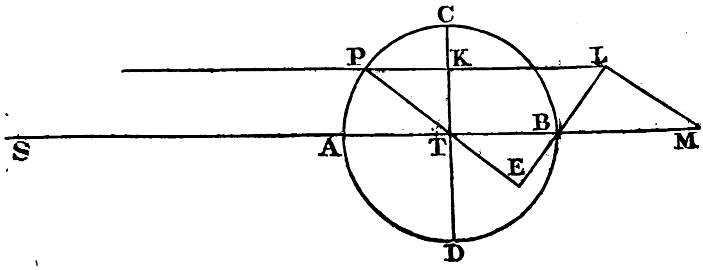
quadratum est $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$, &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}+$, &c. ita M ad $M\times(1+\frac{2Y}{V})$ quod est tempus quo describetur peripheria a d b c vel α δ β κ.

THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, A D B C circulus quem Luna describit; sit S T distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in Terram in mediocri illâ distantiâ, Sol supponatur immotus; distantia Lunæ a Terrâ P T dicatur r et ea non obstante actione Solis in Lunam eadem manere censeatur; sit C P distantia Lunæ a quadraturâ proxima quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus cosinus z; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii P T, est ubivis $\frac{F}{a}\times(\frac{3yy}{r} - r.)$

Nam, secundùm constructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princip., repræsentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam S T vel S K, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræsentetur per lineam S L, et hæc vis censeatur composita ex duabus S M et L M, quarum L M sit parallela radio P T, cùm autem linea S M sit æqualis lineæ $ST \pm TM$, et Terra trahatur per vim S T non secus ac Luna, situs respectivus Lunæ ac Terræ per eam vim S T non mutatur, ideo sola ea pars vis S M quæ exprimitur per T M consideranda venit; præterea ex naturâ gravitatis, est S K ad S L ut est $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{\overline{SK \mp PK}|^2}$ sive ut est $SK^2 \mp 2 SK \times PK + PK^2$ ad SK^2, aut omisso termino PK^2 ut $SK \mp 2PK$ ad S K, sive quoniam 2 P K est exiguum respectu lineæ S K ut S K ad $SK \pm 2PK$ est ergo S L sive $SK \pm KL = SK \pm 2PK$ et $KL = 2PK$, cùm autem linea P L sit proxime parallela lineæ S M, et ex constructione P T sit parallela L M, est T M proxime æqualis lineæ P L, et est $PL = PK + 2KL = 3PK$; ex puncto L ducatur perpendiculum in radium P T (productum si necesse sit) et vis T M, seu vis ipsi æqualis P L resoluta intelligatur in vim P E et vim L E, vis L E radio P T sit perpendicularis ideóque vim centralem non afficit, vis P E secundùm directionem radii agat, sicque punctum P a centro T distrahat, altera autem pars quæ per L M repræsentatur secundùm directionem radii agens punctum P versus centrum trahit; ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii P T est differentia virium P E et L M.

Jam verò ob parallelas S L, S M et T P, L M est $LM = TP = r$, et cùm P K sit proxime perpendicularis in lineam T C, erit P K sinus arcûs P C qui sinus dictus est y, ideóque $PL = 3PK = 3y$, cùm autem triangula P K T, P E L sint similia, est P T (r) ad P K (y) ut P L (3 y) ad P E quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ et differentia virium P E et L M est $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cùm $\frac{3yy}{r}$ superat r, tuncque Lunam a centro distrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minùs efficit quàm r, tuncque Lunam ad centrum attrahit; cùm ergo linea S T sive a repræsentet totam vim Solis in Terram, eaque vis dicatur F, et quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem P T, fiat ut a ad $\frac{2yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam, quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r.)$ Q. e. o.



Corol. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, α δ β κ cujus radius sit ϱ, dico, quod, manente distantiâ Lunæ a quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam, crescet ut illæ distantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, nam cùm arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus P C, sinus eorum erunt ut radii, ideóque sinus arcûs p c erit $\frac{\varrho}{r}$ y, demonstrabitur verò iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus, quod, si Luna in circulo a d b c vel α δ β κ moveretur, ea pars vis Solis quæ secundùm directionem radii P T exercetur, erit $\frac{F}{a} \times (3\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2 \varrho} - \varrho) = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2\varrho^2}{r^2\varrho} = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2\varrho}{r^2} = \frac{\varrho F}{ra} \times (\frac{3y^2}{r} - r.)$

THEOR. V.

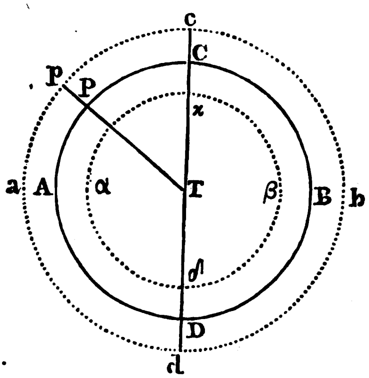
Effectus actionis Solis in Lunam secundùm directionem radii orbitæ lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens, sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur, sit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

Etenim cùm ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cùm vis Solis crescat quantitate quàm minimâ, ea vis censeatur constans per alterum tempusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideóque in singulis particulis arcûs C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem P T et in datâ distantiâ C P a quadraturâ C, quæ distantia C P dicatur u, dicatur M tempus periodicum Lunæ in circulo A D B C citrà Solis actionem, arcus exiguus a puncto P assumptus dicatur d u, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata, erit $\frac{M\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +, \&c.)$

Nam si vis Y quæ in punctum P a Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur, et singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam

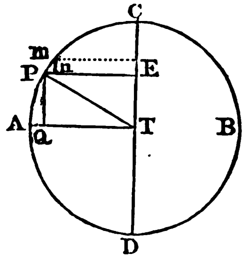


in circulum a d b c transferret, tempus periodicum in singulo circulo excederet tempus periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2\,d\,Y}{V}$. Hinc tandem tempus periodicum quo circulus a d b c describeretur, foret $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +$ &c.) per Theor. III. et tempus quo arcus similis arcui d u describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus periodicum ut d u ad c, foret itaque $\frac{M\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V} +$ &c.) sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis, spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Solis in illis punctis agentis, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui d u in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum y d u, z d u, y^2 d u, z^2 y d u, z y^2 d u, y z^2 d u, y^3 d u, y^4 d u, &c. factarum ex elemento arcûs et dignitatibus ejus sinûs y, vel ejus cosinus z.

Ex naturâ circuli triangulum P T E est simile triangulo fluxionali P m n; ideóque est P T (r) ad P m (d u) ut P E (y) ad P n (d z), ut T E (z) ad m n (d y), hinc est $d\,u = \frac{r\,d\,z}{y} = \frac{r\,d\,y}{z}$;



hinc fit primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis d u dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi d u, ponatur ejus valor $\frac{r\,d\,z}{y}$ si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{r\,d\,y}{z}$ si z sit imparis dimensionis, eâ substitutione fiet ut pares evadant dimensiones y vel z quæ prius impares erant, et quia in primo casu habetur fluxio d z, loco y^2 substituatur $r^2 - z^2$, sicque omnes factores ducentes d z, erunt aut r aut z, ideóque quantitas proposita erit absolutè integrabilis, in altero casu cùm habeatur fluxio d y, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z^2 substituatur $r^2 - y^2$, sicque omnes factores ducentes d y, erunt aut r aut y, ideóque habebuntur termini absolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis d u sint pares, et quidam primò sit z^2 d u vel y^2 d u, integralis horum elementorum est r × C P Q T vel r × C P E, nam est $z^2\,d\,u = r\,z\,d\,y$, et z d y est fluxio areæ C P Q T; est $y^2\,d\,u = r\,y\,d\,z$, et y d z est fluxio areæ C P E; itaque quando P ex C pervenit in A et absolvit quadrantem integralis z^2 d u vel y^2 d u est $r \times \frac{r\,c}{8}$.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis d u numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, putà y, altera variabili exclusa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis y^{2m} d u, ut ea ad impares dimensiones revocetur, spectetur ut $y^{2m-1} \times y\,d\,u$; est autem juxta methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y\,d\,u = y^{2m-1} \int y\,d\,u - \int\int y\,d\,u \times (2m-1) \times y^{2m-2}\,d\,y$, sed $y\,d\,u = \frac{r\,y\,d\,z}{y} = r\,d\,z$, et integralis quantitatis d z sumptæ a puncto C est r − z, hinc $\int y\,d\,u = r\,r - r\,z$, qua substituta in valore integralis $\int y^{2m-1} \times y\, du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr\int (2m-1) \times y^{2m-2} dy + \int . rz \times (2m-1) \times y^{2m-2} dy$, sive (quia $rr\int (2m-1) \times y^{2m-2} dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int . y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int \times (2m-1) \times rz \times y^{2m-2} dy$ (sive quia $r\,dy = z\,du$) $= -rzy^{2m-1} + \int .(2m-1) \times z^2 y^{2m-1} du$ (et loco z^2 substituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + (2m-1)\int . r^2 y^{2m-2} du - (2m-1)\int y^{2m} du$; et transpositione factâ est $2m\int y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int (2m-1) \times r^2 \int y^{2m-2} du$, et tandem $\int . y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2} du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; hinc cùm habeatur integralis quantitatis $y^2 du$; si quæratur integralis $y^4 du$, ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2} du = y^2 du$, et ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m} du$, quæ isto in casu est $y^4 du$; simili modo ex integrali quantitatis $y^4 du$ habebitur integralis quantitatis $y^6 du$, &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = o$ habetur ergo $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2} du$; in eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis $y^4 du$, fiat $m = 2$ erit $\int . y^4 du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2 du$, sed $\int . y^2 du = \frac{r^2 c}{8}$ ideóque $\int . y^4 du = \frac{3r^4 c}{4 \times 8}$; si quæratur integralis quantitatis $y^6 du$ fiat $m = 3$ et erit $\int y^6 du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4 du$ sed $\int . y^4 du = \frac{3r^4 c}{4.8.}$ ideóque $\int . y^6 du = \frac{3.5 r^6 c}{4.6.8.}$

Corol. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit et arcus u ex puncto C, unde dz negativum esse debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est o, ideóque evanescit hoc elementum, tunc est $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. sit $\int . rz^3 dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si e contra arcus u ex puncto A inciperet, integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur, completa non erit, et eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat, erit $\int . y\, dz =$ A P E T et $\int z\, dy$ est area A P Q, ut liquet ex ipsâ figurâ.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat et ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y substituatur et vice versa; liquet enim quod z est sinus respectu arcûs A P, et y ejus cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

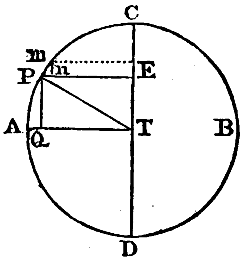
Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, et Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus du, (quodque debet esse $\frac{M\,du}{c}$ posito M tempore periodico Lunæ, et c peripheriâ quam percurrit,) evadat $\frac{M\,du}{c} \times (1 + \frac{2Y}{V})$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideò cùm tempore $\frac{M\,du}{c}$ iste arcus du describi debuisset hoc tempore $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V} du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ (per Theor. IV.) ergo elementum retardationis Lunæ est $du \frac{2F}{Va} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, cujus integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va} \times (\frac{3r^4 c}{8r} - \frac{1}{4} rc)$, sive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8} rc$, cùm P pervenit in A, cùmque idem sit Solis effectus in singulo quadrante, tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8} rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$ dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, et loco mensis periodici M, mensis synodicus μ intelligatur, et censeatur quod proxime verum est, mensem synodicum qui respondet mensi periodico in circulo a d b c peracto, esse ad eum mensem periodicum ut μ ad M, ideóque eum mensem synodicum esse $\mu \times (1 + \frac{2Y}{V})$ omnia procedent ut prius, et erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de veris quadrantibus circuli, ideóque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{F\,r\,c}{V\,a}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verùm alia certior correctio est adhibenda; constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem radio orbitæ lunaris perpendicularem, ita ut velocitas Lunæ in quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut 109.73 r ad 109.73 r + $\frac{y\,y}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus d u brevius fit in proportione velocitatum, ideóque cùm id tempus fuerit $\frac{\mu\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$, fit $\frac{109.73\,r}{109.73\,r + \frac{y\,y}{r}} \times \frac{\mu\,d\,u}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$ sive fractionem ad series reducendo $\overline{1 - \frac{y\,y}{109.73\,r\,r}} \times \frac{\mu\,d\,c}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$; quantitas autem hæc $\frac{\mu\,d\,c}{c} \times (1 + \frac{2\,Y}{V})$; duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, et de acceleratione ad



hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; et hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 10973 ad 11023, et inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur; altera pars $\frac{\mu\,d\,u}{c} \times \frac{2\,Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundùm radium orbitæ lunaris exercitam, et de hac solâ isto calculo agitur, ideóque cùm ex istâ oriatur retardatio $\frac{2\,Y}{V}$ d u, et tempus $\frac{\mu\,d\,u}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{y\,y}{109.73\,r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus d u describi debuisset, erit solummodo $\frac{2\,Y\,d\,u}{V} - \frac{2\,Y\,y\,y\,d\,u}{109.73\,r^2\,V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r)$ evadet hoc elementum d u $\times \frac{2\,F}{V\,a} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r - \frac{3\,y^4}{109.73\,r^3} + \frac{y\,y}{109.73\,r})$ cujus integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2\,F}{V\,a} \times (\frac{3\,r^2\,c}{8\,r} - \frac{1}{4}\,r\,c - \frac{3 \times 3\,r^4\,c}{4 \times 8 \times 109.73\,r^3} + \frac{r^2\,c}{8 \times 109.73})$ sive $\frac{2\,F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ et quadruplicatum pro totâ revolutione fit $\frac{F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Corol. Constat ex Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. Princip. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii, et inversè ut temporum periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, et M mensis periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{A\,A}$ ad $\frac{r}{M\,M}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{a\,M\,M}{r\,A\,A}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{F\,r\,c}{V\,a} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\,c$, et si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ lunaris, ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}\,c$.

PROB. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundum radium orbitæ lunaris exercitam.

Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex notâ proportione mensis synodici ad periodicum) invenietur mensem periodicum apparentem esse $\frac{A\,S}{A + S}$, et quoniam hoc tempore periodico Luna describeret peripheriam c, deducetur quod tempore synodico S describet arcum $\frac{A + S}{A}\,c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore periodico M describere debuisset peripheriam c, et, eâdem in hypothesi, tempore S descripsisset arcam $\frac{S\,c}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore S est $\frac{S\,c}{M} - \frac{A + S}{A}\,c = \frac{A\,S - A\,M - M\,S}{A\,M}\,c$. Sed per Corollarium præcedentis Problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}\,c$ hinc obtinetur hæc æquatio $A\,S - A\,M - M\,S = \frac{433.92\,M^3}{438.92\,A}$, loco M scribatur X A, loco S scribatur E A, et fiet hæc æquatio $A^2\,E - A^2\,X - A^2\,E\,X = \frac{433.92\,A^3X^3}{438.92\,A}$ sive $E = X + E\,X + \frac{433.92}{438.92}\,X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A hinc $E = .0804896$ et æquatio fit $.08084896 = 1.08084896\ X + \frac{433.92}{438.92} X^3$, loco X substituatur $.0744 + R$ et æquatio evadit $.08084896 = .08082129 + 1.09726905\ R$, unde habetur $.00002767 = 1.09726905\ R$, hinc obtinetur $R = .0000252$ et $M = .0744252\ A$.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis a Terrâ distantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, retardatio Lunæ durante tempore synodico, cùm Terra distabit a Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\ c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{F r c}{V a} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ a Sole distantiâ loco a ponatur X, et præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ retardatio Lunæ sit $\frac{a^2 F r c}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; tum verò loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ et habebitur expressio Theorematis hujusce.

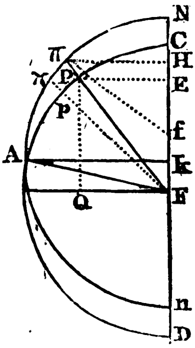
LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur 2 a describatur ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit 2 b, erit $b^2 = a^2 - e^2$; ex foco ut centro radio a describatur circulus, et ducantur a foco lineæ secantes circulum in P et ellipsim in Π, linea F Π dicatur x, sinus anguli A F P sit y, cosinus z; dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$.

Ducatur ex Π, Π H perpendicularis ad axem, et propter triangulorum F P E, F Π H similitudinem erit F P ad F Π ut P E ad Π H et ut F E ad F H, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: sit f alter focus ellipseos, ex eo ducatur linea f Π, ex natura ellipseos est $f\Pi = 2a - x$ sed $f\Pi^2 = \Pi H^2 + f H^2$ et $\Pi H = \frac{y}{a} x$, et $f H = F H - F f$ vel $F f - F H$ vel $F f + F H$, et est $F f = 2 e$ et $F H = \frac{z}{a} x$ hinc $\Pi H^2 + f H^2 = \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = f\Pi^2 = 4 a^2 - 4 a x + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4 e z}{a} x + 4 e^2 = 4 a^2 - 4 a x$, et dividendo per 4 et transponendo est $a x \mp \frac{e z}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp e z}$. Q. e. o.

Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times (1 \pm \frac{e z}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$, &c.) sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, et sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur, termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, et quidem si agatur de Solis excentricitate, ea non



assurgit ad duas centesimas radii, et excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92\ c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{(a^2 \mp e z)^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, et b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Terra describit circa Solem arcum quamminimum datum.

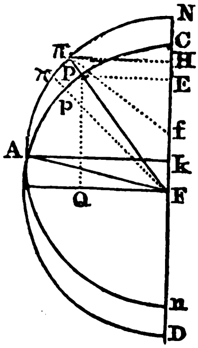
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n ellipsis quam Terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π et ei quam proxima F p π quæ secet in circulo C A D arcum P p, et quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur e Sole, descripsisse arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a ellipseos semi-axis major, k circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli

$\frac{a\,k}{4}$, quæ est ad aream semi-ellipseos ut est a ad b, hinc area semi-ellipseos est $\frac{b\,k}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p sit d u, radio F Π sive X describatur arculus ex ϖ in F Π, is erit ad d u ut est F Π sive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\,d\,u}{a}$, ideóque area F Π ϖ est $\frac{x^2\,d\,u}{2\,a}$ $= \frac{b^4\,a\,d\,u}{2 \times \overline{a^2 + e\,z}|^2}$ (per Lem. præced.).

Sed tempus quo Terra arcum P p descripsisse videtur, est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π ϖ, sive $\frac{x^2\,d\,u}{2\,a}$ ad semi-ellipsim $\frac{b\,k}{4}$. Est itaque illud tempus quo Terra arcum P p descripsisse videtur $\frac{4\,x^2 d u}{2\,a\,b\,k} \times \frac{1}{2}\,A = \frac{x^2\,A\,d\,u}{a\,b\,k}$.



Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2\,A\,d\,u}{a\,b\,k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2\,A\,d\,u}{438.92 \times S\,a\,b\,k} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ sive $\frac{433.92\,c \times d\,u}{438.92 \times S.\,b.\,k} \times \frac{M^2\,a^3}{A\,x}$, aut substituendo valorem fractio $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.\,c\,d\,u}{438.92.\,S\,b\,k} \times \frac{M^2\,a}{A} \times \frac{a^2 \mp e\,z}{b^2}$ sive $\frac{433.92\,c\,d\,u \times M^2\,a}{438.92\,S\,A\,b^3\,k} \times (a^2 \mp e\,z.)$

PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione Terræ circa Solem.

Primo inveniatur integralis elementi per Probl. III. inventi, quod est $\frac{433.92\,c\,d\,u \times M^2\,a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3\,k} \times (a^2 \pm a\,z)$ cujus integralis est $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92\,S.\,A\,b^3\,k} \times (a^2\,u \mp a\,c\,y.)$

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u = \frac{1}{2}\,k$, et termini in quibus occurrit y sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio sit $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92\,S\,A\,b^3\,k} \times \frac{1}{2}\,a^2\,k = \frac{433.92\,c \times M^2\,a^3}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra a suo aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit; observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{4}\,k - e$, et y est b, unde integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92\,S.\,A\,b^3\,k} \times (\frac{1}{4}\,a^2\,k - a^2 e - a\,b\,e\,)$ aut simplicius si quantitates a et b pro æqualibus sumere liceat, fiet $\frac{433.92 c \times M^2}{438.92 S.\,A k} \times (\frac{1}{4}\,k - 2e)$ sive $\frac{433.92\,c a^3 \times M^2}{438.92 \times S\,A\,b^3} \times (\frac{1}{4} - \frac{2\,e}{k}.)$

PROBL. V.

Invenire æquationem motûs medii lunaris quæ pendet ex Solis actione, et quæ est adhibenda quando Terra est in suâ mediocri distantiâ a Sole.

Primò observandum est, motum Lunæ, qualis ex apparentiis determinatur; ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ, et ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi sese immiscet. Astronomi verò cùm motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

Cùm ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, quæstio est quænam correctio motui medio Lunæ sit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideóque investiganda est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, et tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita, aut ex eo detracta, restituet verum locum Lunæ quatenus hæc Sola irregularitas spectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra est in mediocri distantiâ, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-ellipseos (quæ est $\frac{b\,k}{4}$ et est semestri tempori proportionalis) ad aream F N A (quæ est ellipseos quarta pars cum triangulo F A K ideóque est $\frac{b\,k}{8} + \frac{b\,e}{2}$ et est proportionalis tempori quo Terra ab aphelio suo ad mediocrem a Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore facta quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92\,c\,a^3 \times M^2}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab aphelio ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S\ A\ b^3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{k}\right)$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S\ A\ b^3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{2\,e}{k}\right)$. Hinc substractione factâ, tardatio mediocris superat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\ c\ a^3 \times M^2}{438.92\ S.\ A\ b^3} \times \frac{3\,e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur $.016\frac{7}{8}$ a, erit $3\ e = .050\frac{5}{8}$ a, et loco k scribatur 6.283188 a; et loco c, 360 gr. erit $\frac{3\,e\,c}{k} = \frac{18^{gr}.\,225}{6.283188} = 2^{gr}.\ 9005$; præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur .0744252 A; et loco S, .08084896 A, ut in Prob. II. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit .06773137 cùmque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1.00045 et superius sumptum sit a loco b, hæc fractio pro unitate sumi potest, hinc est $\frac{a^3\,M^2}{b^3\ S.\ A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}.\ .9005$ efficit $0^{\circ}.19646$ quod ductum per 60'. efficit 11'.7876, sive 11'. 47". 256''', quam Newtonus 11'. 49". assumit; majorem autem æquationem in hypothesi ellipticâ inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

Cor. 1. Cùm hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times c a^3 \times M^2}{438.92 \times S.\,b^3\,A} \times \frac{3\,e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92\ c \times M^2}{438.92\ S \times A} \times \frac{3\,e}{k}$, et quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio ubi Tellus est in suâ mediocri distantiâ, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideóque si ea excentricitas major sit quàm $.016\frac{7}{8}$ radii a, crescet hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr. $e = a \times .016\frac{31}{12}$, et fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11'. 47". 616 ad quartum, is quartus terminus 11'. 49". 42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus æquationem facit 11'. 50".

Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-ellipsis $\frac{b\,k}{4}$ ad aream F N Π ita semestris tardatio $\frac{433.92\ c\ M^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2\ b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\ c \times M^2 \times F\,N\,\Pi}{438.92 \times S \times A\ b^3} \times \frac{2\,a^3}{b\,k}$ tum verò si sumatur tardatio loco Π conveniens, quæ est $\frac{433.92 \times c \times M^2\,a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times (a^2 u \mp a e y)$ (Probl. IV.) erit hæc æqu. $\frac{433.92\ c \times M^2\,a^2}{438.92 \times S.\,A \times b^3 k} \times \left(\frac{2\,a \times F\,N\,\Pi}{b} - a\,u \pm e\,y\right)$, ideóque erit ut $\frac{2\,a\,F\,N\,\Pi - a\,b\,u \pm b\,e\,y}{b}$; aut sumendo a = b, ut $\frac{2\,F\,N\,\Pi - b\,u \pm e\,y}{b}$. Jam verò hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur, hac proportione obtinetur, ut semi-ellipsis $\frac{b\,k}{4}$ ad aream F N Π ita semi-circulus $\frac{1}{2}$ k ad arcum medio motu descriptum; qui ergo erit $\frac{4\,F\,N\,\Pi}{b\,k} \times \frac{1}{2}\,k = \frac{2\,F\,N\,\Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis reverâ descriptus, est N Π sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2\,F\,N\,\Pi}{b} - u$ sive $\frac{2\,F\,N\,\Pi - b\,u}{b}$ cui quantit. $\frac{2\,F\,N\,\Pi - b\,u \pm e\,y}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus e y propter exiguitatem e respectu b, et y respectu u considerationem nullam hic meretur; ergo æquatio lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantiâ Telluris a Sole, est ad æquationem motûs lunaris adhibendam cùm Tellus est in ea mediocri distantiâ a Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ u ab aphelio, ad æquationem Luni-Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

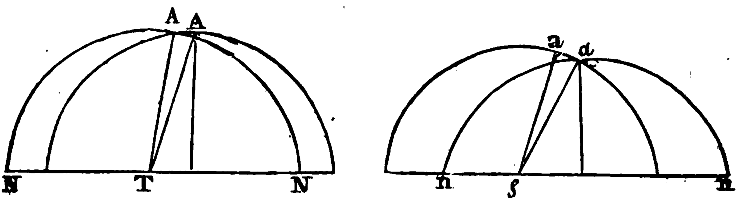
Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ a Sole; nam cùm sit proportionata æquationi centri Solis, et æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantiâ Telluris a Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, æquatio solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De incremento motûs medii Lunæ, et ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in hypothesi eum orbem esse ellipticum, methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibita.

THEOR. I.

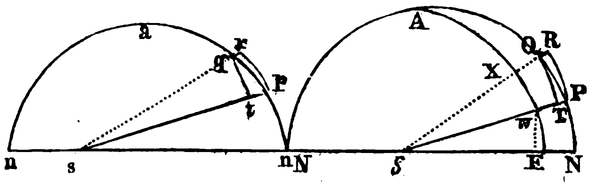
Sint duæ ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; dico, quod si tempora periodica in utraque ellipsi sint ut earum ellipsium areæ, ellipses illæ erunt inter se similes.

Describantur duæ ellipses N A N, n a n, circa corpora S et s in focis ellipsium posita, et quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur peripheria ellipseos N A N, sit ad totum tempus quo describitur peripheria ellipseos n A n



ut area prioris ellipseos ad aream alterius, ellipses illæ similes esse debebunt, hoc est earum ellipsium axes majores erunt inter se ut sunt inter se earum minores axes, v. gr. si semi-axis major ellipseos N A N dicatur r, ejus minor semi-axis dicatur q et major semi-axis ellipseos n a n dicatur ϱ, ejus minor semi-axis $\varkappa$, dico quod erit q ad $\varkappa$ ut est r ad ϱ.

Ex naturâ ellipsium area ellipseos N A N est ad aream ellipseos n a n ut est r q ad $\varrho\,\varkappa$, et ex hypothesi tempus periodicum in ellipsi N A N est ad tempus periodicum in ellipsi n a n in eadem ratione r q ad r $\varkappa$, si ergo sumantur arcus similes A A, a a in mediocri distantiâ in utrâque ellipsi, tempora quibus describentur illi arcus erunt ut tota tempora periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri distantiâ positi describuntur motu medio corporum eas ellipses describentium, et erunt etiam ut areæ A S A et a s a ex hypothesi, et istæ areæ A S A et a s a, sunt ut quadrata linearum S A et s a sive ut r^2 ad ϱ^2; ergo est r^2 ad ϱ^2 ut r q ad $\varrho\,\varkappa$, et dividendo terminos homologos per r et ϱ est r ad ϱ ut q ad $\varkappa$; ergo ellipses sunt similes. Q. e. d.



THEOR. II.

Sint, ut prius, duæ ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita quorum vires absolutæ diversæ sint, et sint tempora periodica in utrâque ellipsi ut earum ellipsium areæ, dico quod axes majores earum ellipsium erunt reciprocè ut vires absolutæ corporum centralium.

Vis absoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V — Y, ducantur in utrâque ellipsi lineæ S P, s p ad lineas apsidum S N, s n similiter inclinatæ, et iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos similes P S Q, p s q constituentes, ducantur ex Q et q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, et productis lineis S Q, s q donec occurrant tangentibus in R et r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum describuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex hypothesi, tempora quibus describentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, et quia, ex const. illæ areæ sunt similes, erunt ut quadrata linearum homologarum sive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales et ut quadrata temporum, vires verò centrales sunt ut $\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, et quadrata temporum sunt ut SP^4 ad sp^4, ergo lineæ Q R et q r erunt inter se ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{sp^2} \times sp^4$ sive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo. In omnibus ellipsibus per vim centralem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut constat ex Prop. XI. Lib. I. Princip. Si itaque latus rectum ellipseos N A N sit L, ellipseos verò n a n sit λ, erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ et $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco Q R et q r quantitates ipsis proportionales $V \times QT^2$ et $\overline{V-Y} \times qt^2$ collocentur, et erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{(V-Y)\,qt^2}$ sive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; sed ex naturâ ellipsium, est $L = \frac{q^2}{r}$ et $\lambda = \frac{\varkappa^2}{\varrho}$, præterea quia ellipses sunt similes, ex præcedente Theoremate, est $q : r = \varkappa : \varrho$, ideóque $\frac{q}{r} = \frac{\varkappa}{\varrho}$; est ergo $L : \lambda$ ut q ad $\varkappa$ sive ut r ad ϱ; itaque est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. e. d.

Cor. In his itaque hypothesibus tempora periodica erunt inversè ut quadrata virium absolutarum corporum S et s; sunt enim per Theor. I.

ut r^2 ad ρ^2, et ex hoc Theoremate est r ad ρ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ergo tempora periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}|^2}$.

THEOR. III.

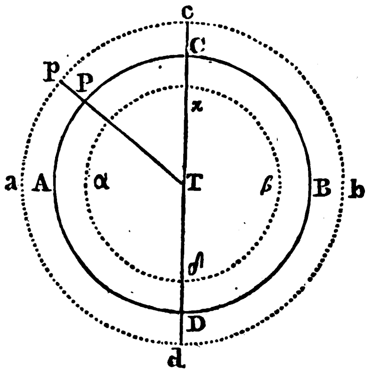
Sit T Terra, P Luna quæ circa Terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore periodico M, vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; dico quod si ea vis V — Y maneat constans, Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semi-axis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{V\,r}{V-Y}$ et tempus periodicum erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}|^2}$ sive $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} \times \frac{3\,Y^2}{V^2} + \frac{4\,Y^3}{V^3}$, &c.).

Nam 1. cùm Luna discedit a suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem conicam, quæ erit adhuc ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, et per vim priorem orbita circulo finitima describebatur, ita ut nec in hyperbolam nec in parabolam mutari possit hæc orbita.

2. Cùm vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbitâ A D B C, tempus quo describetur peripheria a d b c erit ad tempus M quo describebatur peripheria A D B C ut tota area A D B C ad aream a d b c.

3. Cùm ergo in his orbitis A D B C, a d b c (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cùm describitur orbita A D B C quàm cùm describitur a d b c) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per hyp., axes majores erunt inversè ut vires V et V — Y, per Theor. II. et tempora periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}|^2}$ itaque si in orbita A D B C, id tempus dictum fuerit M, in orbita a d b c, erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}|^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resolvendo $M \times (1 + \frac{2\,Y}{V} + \frac{3\,Y^2}{V^2})$. Q. e. d.

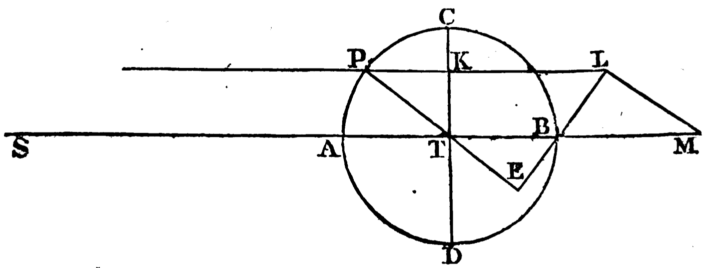
Cor. Iisdem principiis ostendetur, quod si vis absoluta Terræ augeretur quantitate exiguâ Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\,\delta\,\beta\,\kappa$



similem priori A D B C, cujus radius foret $\frac{r\,V}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè et quæ describeretur tempore $M \times (1 + \frac{2\,Y^2}{V} + \frac{3\,Y^2}{V^2} + \frac{4\,Y^3}{V^3}$, &c).sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum

Ut autem servetur hæc conditio quantitatem Y esse exiguam, fractiones $\frac{3\,Y^2}{V^2}$, &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

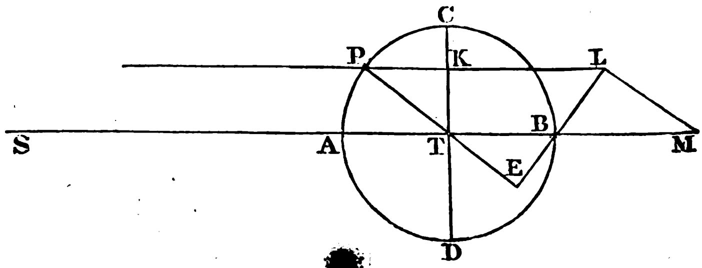
Schol. In primo calculo, cùm supposuerimus orbitam Lunæ A D B C esse circularem, orbitas novas a d b c, $\alpha\,\delta\,\beta\,\kappa$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.



THEOR. IV

Sit T Terra, P Luna, A D B C orbita quam Luna circa Terram describeret, sepositâ omni Solis actione, sit S T distantia mediocris Terræ a Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in

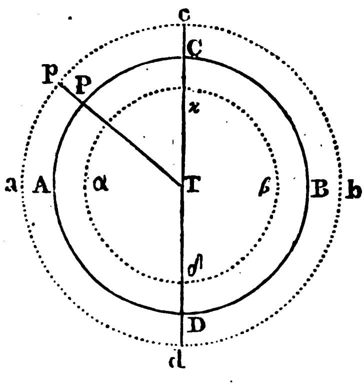
Terram ipsam in mediocri illâ distantiâ, distantia Lunæ a Terrâ P T dicatur r; sit C P distantia Lunæ a quadraturâ proximâ quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus cosinus z; dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii P T est ubique $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cùm ea vis Solis per gradus infinitè



parvos crescat et decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cùm vis Solis crescat quantitate quam minimâ, ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideóque in singulis particulis arcûs C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ a Terrâ, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive substractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ a Terrâ, crescat verò ut distantiæ; dicatur x alia quævis distantia Lunæ a Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, et vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam siquidem fingitur vim corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis et decrescere sicut quadrata distantiarum, fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad V $-\frac{x^3}{r^3}$ Y quæ erit vis in distantiâ r.

THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ a Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3xV}{Vr^3 - Yx^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4Y}{r^3V} + \frac{x^7Y^2}{r^6V^2}$, &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4Y}{r^3V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur, est similis priori per Lem. I. et per Lem.

II. earum lineæ homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversè, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ita x ad distantiam homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{x V}{V - \frac{x^3}{r^3} Y}$ sive $\frac{r^3 x V}{V r^3 - x^3 Y}$

Q. e. d.

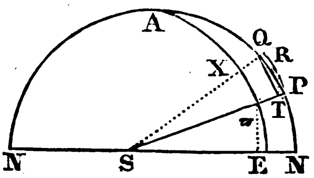
THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus ϖ X inter lineas S P, S Q interceptus dicatur d u; dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideóque si tempus periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, et tota peripheria circuli cujus radius est r, dicatur c, tempus quo arcus d u describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{M d u}{c}$; 2. cùm sit r semi-axis major orbitæ lunaris, si dicatur q ejus axis minor, dico quod tempus quo idem ille arcus d u describi videbitur urgente Solis actione et spectatâ excentricitate orbitæ lunaris erit $\frac{M d u}{c} \times (\frac{x^2}{q r} + \frac{2 x^5 Y}{q r^4 V} + \frac{3 x^8 Y^2}{q r^7 V^2}$, &c.).

Primò enim liquet quod is circulus describetur eo tempore periodico quo describeretur orbita elliptica lunaris si sola vis Telluris agat, nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque ellipsibus, tempora eorum periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princip. Newt.) sed hujus circuli et orbitæ lunaris axes majores sunt æquales (per const.); ergo eorum tempora periodica sunt æqualia.

Secundò dicatur E tota superficies ellipseos orbitæ lunaris, hæc superficies E erit ad aream S Q P ut tempus periodicum M ad tempus quo arcus P Q describeretur, quod erit ergo $\frac{S Q P \times M}{E}$ valor autem areæ S P Q est $\frac{Q T \times S P}{2}$, sed ut r ad d u, ita S Q sive S P (x) ad Q T, est ergo $Q T = \frac{x d u}{r}$ et $\frac{Q T \times S P}{2} = \frac{x x d u}{2 r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum Q P, est $\frac{M x x d u}{2 r. E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur, ut quadrata radiorum seu (per Theor. præc.) ut $x x$ ad $x x + \frac{2 x^5 Y}{r^3 V}$ ita $\frac{M x x d u}{2 r. E}$ ad $\frac{M d u}{2 r. E} \times (x x + \frac{2 x^5 Y}{r^3 V})$, sive cùm semi-axis minor orbitæ lunaris dicatur q et area ellipseos E sit ideò $\frac{1}{2} q c$, tempus quo arcus d u describi videbitur a Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{M d u}{c} \times (\frac{x x}{q r} + \frac{2 x^5 V}{q r^4 V.} +$, &c.).

Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area S P Q foret $\frac{M d u}{c} \times \frac{x x}{q r}$, et discrepantiæ illius quantitatis a motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus verò (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{M d u}{c} \times \frac{2 x^5 Y}{q r^4 V}$ per Solis actionem genitus novam motûs medii perturbationem producit, de quâ hic



agendum; ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{M d u}{c}$ arcus d u descriptus fuisset, tempore hujus excessûs $\frac{M d u}{c} \times \frac{2 x^5 Y}{q r^4 V}$ arcus $\frac{2 x^5 Y d u}{q r^4 V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem verò ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. I. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ lunaris exercitam, hæc retardatio $\frac{2 x^5 Y d u}{q r^4 V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{y y}{109.73 r^2}$, sicque evadit $\frac{2 x^5 Y d u}{q r^4 V} - \frac{2 x^5 y^2 Y d u}{109.73 q r^6 V}$.

LEMMA I.

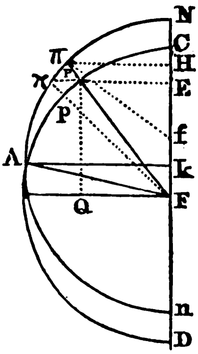
Ex præcedentis calculi Lemmate II. constat quod si ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam apsidum, et excentricitas dicatur f, erit $F \Pi$ sive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times F E}$.

Nulla enim est differentia nisi in litteris, quæ diversæ sunt quia hic agitur de orbitâ ellipticâ Lunæ, illic de orbitâ ellipticâ Telluris, cæterum eadem est demonstratio.

Hic autem valor in seriem redactus evadet

$\frac{q^2}{r}\times(1\pm\frac{FE\times f}{r}+\frac{FE^2\times f^2}{r^4}\pm\frac{FE^3\times f^3}{r^6}$, &c.)

Signa superiora adhibenda sunt cùm Luna distat ab apogæo minus quàm 90 gr. tam in

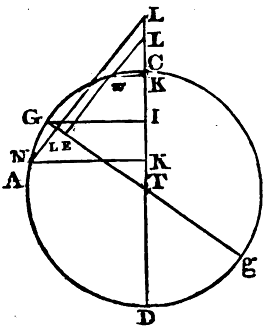


consequentia quàm in antecedentia, cùm Luna magis distat ab apogæo quàm 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

LEMMA II.

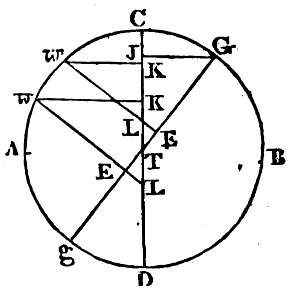
Si linea apsidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, dicatur verò m sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum, et n ejus anguli cosinus; sit y sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ, z ejus cosinus, dico quòd distantia Lunæ a Terrâ, quæ dicitur x erit $\frac{q^2r^2}{r^3\pm f\times nz+my}$ cùm Luna est in eâdem quadraturâ cum alterutrâ apsi, est verò $\frac{q^2r^2}{r^3\mp f\times nz-my}$ cùm Luna et alterutra apsis non sunt in eâdem quadraturâ.

Sit C A D B circulus descriptus centro T,



radio æquali mediocri distantiæ Lunæ a Terrâ quæ dicitur r. Sit G T g linea apsidum, C T D linea quadraturarum, G I sinus anguli lineæ quadraturarum et lineæ apsidum qui dicitur m, T I ejus cosinus qui dicitur n, ϖ punctum circuli C A D B quod respondet vero loco Lunæ in peripheria suæ orbitæ, quod sumitur vel ultra vel citra apsidem, ϖ K sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ qui dicitur y, T K ejus cosinus qui dicitur z, ducatur ex ϖ in lineam apsidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec secet lineam quadraturarum in L, triangulum T I G est simile triangulo T E L (ob angulos rectos E et I et angulum communem T); triangulum T E L est simile triangulo ϖ K L (ob angulos rectos E et K et angulum communem L); hinc est T I (n) : I G (m) : : ϖ K (y) : K L $=\frac{my}{n}$; hinc in isto casu T L $=$ T K $+$ K L $=$ $z+\frac{my}{n}$, sed ex similitudine triang. T I G et T E L est T G (r) : T I (n) : : T I, $(z+\frac{my}{n})$: T E $=\frac{nz+my}{r}$, substituto ergo hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2r^2}{r^3\mp f\times(nz-my)}$. Q. e. o. 1°.

Si ϖ et apsis alterutra non sint in eadem quadratura, et 1. si tamen ϖ non distet 90 gr. a



proxima apside, similia erunt ut prius triang. T J G, T E L, ϖ K L, unde erit K L $=\frac{my}{n}$, sed erit T L $=$ T K $-$ K L sive $z-\frac{my}{y}$, unde fiet T E $=\frac{nz-my}{r}$ ideóque erit x $=$ $\frac{q^2r^2}{r^3\mp f\times(nz+my)}$; sed si ϖ distet a lineâ apsidum plusquam 90 gradibus, erit T L $=$ K L $-$ T K sive $-$ T K $+$ K L, ideóque T E fiet $\frac{-nz+my}{r}$, sed cùm in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quàm 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz+my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideóque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times (nz - my)}$ quotiescumque x et apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cùm eam quadraturam describere incepit. Q. e. o. 2°.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times \left(1 \pm \frac{f \times \overline{nz \pm my}}{r \quad r^2} + \frac{f^2 \times \overline{nz \pm my}|^2}{r^2 \quad r^4} \pm \frac{f^3 \times \overline{nz \pm my}|^3}{r^3 \quad r^6}, \&c.\right)$ signa superiora litteræ f sunt adhibonda cùm initium quadraturæ, quam describit Luna, minus distat ab apogæo quàm 90 gr. tam in consequentia quàm in antecedentia, si verò magis distet ab apogæo quàm 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda.

Signa superiora quantitatis m y sunt adhibenda cùm et Luna et apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cùm Luna et apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato sinu et cosinu anguli quem faciunt linea apsidum et linea quadraturarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam apsidum et Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; quo posito, cùm retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. VIII.) $\frac{2 a^5 Y du}{q r^4 V} - \frac{2 x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2 r Y du}{q V}$ ponatur ejus valor $\frac{2 r F du}{V a q} \times \frac{3 y^2}{r} - r$ et loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times \left(1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}, \&c.\right)$ qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times \left(1 \pm \frac{5 f A}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}\right)$; verùm observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times \left(1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^2}\right)$ ducatur in $1 - \frac{yy}{109.73 r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73 r^{12}} \times \left(109.73 r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2 A^2}{r^4} - \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^6}\right)$ denique ducatur in $\frac{2 F du}{V a q} \times (3 y^2 - r^2)$ fit

$$\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \left(329.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + r^2 y^2 + \frac{45 \times 109.73 f^2 y^2 A^2}{r^4}\right) - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6} + \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^4}$$

sive $\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \left(330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6}\right)$. Loco A^2 substituatur $n^2 z^2 + m^2 y^2$, omisso termino $\pm 2 m n z y$ quia quando tota revolutio Lunæ assumitur, duo sunt quadrantes in quibus Luna est cum apside, duo verò in quibus Luna cum neutrâ apside occurrit, fit tandem totum elementum

$$\frac{2 F q^9 du}{109.73 V a r^{12}} \times \left(330.19 r^2 y^2 - 3 y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 z^2 y^2}{r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 r^2 n^2 z^4}{r^4} - \frac{109.37 \times 15 f^2 r^2 m^2 y^2}{r^4} - \frac{45 f^2 n^2 z^2 y^4}{r^6} - \frac{45 f^2 m^2 y^6}{r^6}\right);$$

cujus integralis secundùm Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit

$$\frac{2 F q^9}{109.73 V a r} \times \frac{330.19 r^4 c}{8} - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 8} - \frac{109.73 r^4 c}{4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{4 r^4} + \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 m^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4}$$

; quod reductum efficit

$$\frac{2 F q^9 c}{109.73 V. a r} \times \left(\frac{108.48}{8} + \frac{330.19 \times 15 \times f^2 \times \overline{\frac{1}{4} n^2 + \frac{3}{4} m^2}}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 \overline{n^2 + m^2}}{8 r^4} - \frac{45 f^2 \times \overline{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}}{8 r^4}\right)$$

quod quadruplicatum efficit

$$\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^8} \times \left(108.48 + 330.19 \times 15 f^2 \times \frac{\frac{1}{4} n^2 + \frac{3}{4} m^2}{r^4} - 109.73 \times 15 f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45 f^2 \times \frac{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}{r^4}\right)$$

sive tandem

$$\frac{F q^9 c}{109.73 V a r^8} \times \left(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15 f^2 n^2}{r^4}\right).$$

Cor. Si Sol et apsis immoti non fingantur, sed supponatur eos pari passu moveri, res eodem redibit, si modò hæc revolutio, quâ durante nascitur hæc tardatio, censeatur æqualis mensi synodico; quamvis autem apsis reverâ non sequatur motum Solis, sed longe lentiùs procedat, imo in isto calculo immota censeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter eccentricitatem orbitæ lunaris quæ magna non est, quàm propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex positione Lunæ respectu Solis, et minima sit ea pars hujus tardationis quæ per situm Lunæ respectu apsidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{F q^9 c}{109.73 \, V a r^8} \times \left(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4}\right)$ liquet quod si linea apsidum cum lineâ quadraturarum consentiat, quo casu sinus m anguli quem facit linea apsidum cum linea quadraturarum evanescit, et ejus cosinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{F q^9 c}{109.73. V a r} \times \left(108.48 - 27.5575 \times 15 \frac{f^2}{r^2}\right)$.

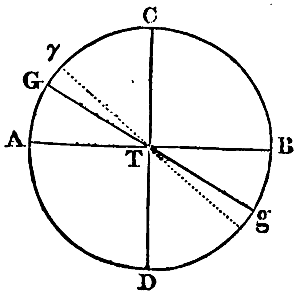
E contra, si linea apsidum sit in syzygiis ita ut m fiat r, et n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{F q^9 c}{109.73. \, V a r^8} \times \left(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2}\right)$; ideò mensis synodicus fit minimus cùm apsides sunt in quadraturis, longissimus verò cùm apsides sunt in syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio solaris Lunæ, quæ secunda dicitur, et pendet ex situ apsidum, sive apogæi, respectu Solis.

PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari et lineam apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum successive obtinere, invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A et B, et dum Sol ab apogæo Lunæ in consequentia movetur, et apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare et ipsum apogæum a Sole in antecedentia regredi; moveatur apogæum ex G in γ per arcum quamminimum G γ qui dicatur d u tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G γ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G et quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo apsis describit arcum G γ ad totum mensem synodicum: dicatur ergo A tempus quo apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad d u, ita A ad tempus quo apsis arcum d u describet, quod erit $\frac{A d u}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A d u}{c}$, ita tardatio mense synodico facta, quæ est $\frac{F q^9 c}{109.73 \, V a r^8} \times \left(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4}\right)$ ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A d u}{c}$ quæ erit itaque $\frac{A F q^9 d u}{S \times 109.73. \, V. \, a r^8} \times \left(108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4}\right)$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præcedentis calculi adhibetur, et n respondet quantitati z) et integretur pro quadrante juxta Cor. 4. ejus Lem. habebitur $\frac{A. \, F q^9}{S \times 109.73. \, V. \, a r^8} \left(\times \frac{108.48 \, c}{4} + \frac{136.0375 \times 15 f^2 r^2 c}{4 r^4} - \frac{163.595 \times 15 f^2 r^2 c}{8 r^4} \right)$; quadruplicetur verò pro toto circulo fiet $\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73. \, V a r^8} \times \left(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}\right)$; denique ut totum tempus A ad tempus synodicum



S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{F q^9 c}{109.73 \, V a r^8} \times \left(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}\right)$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, et orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ, 1. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2. dum describit annuam suam orbitam, 3. durante mense synodico, 4. dum Terra ab aphelio suo ad mediocrem suam a Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris a Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a, erit $\frac{a a F}{x x}$ ejus vis in distantia x; ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem mense synodico factam invenimus, x loco a ponatur et $\frac{a a F}{x x}$ loco F, evadet tardatio $\frac{a^2 F q^9 c}{109.73 \, V x^3 r^8} \times \left(108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}\right)$, et si

A sit annus sidereus, M mensis periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V} = \frac{M^2 a}{A^2 r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{109.73\ A^2 x^3 r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$.

Sit b semi-axis minor ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k peripheria radio a descripta, ideóque sit $\frac{1}{2}$ b k area tota ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit d u motus angularis Terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{x x d u}{2 a}$, (ut constat ex calculo præcedente) ideóque ut ellipsis tota $\frac{1}{2}$ b k ad hanc aream $\frac{x x d u}{2 a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus d u describitur, qui erit ergo $\frac{A x x d u}{a b k}$, et ut mensis synodicus S ad id tempus, ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore factam quæ erit

$$\frac{A M^2 a^3 x^2 q^9 c d u}{109.73.\ S.\ A^2 x^3 a b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$$

sive $\frac{M^2 a^2 q^9 c d u}{109.73.\ S. A x.\ b k r^9} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$

sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ per Lem. II. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73.\ S.\ A.\ b^3 k.\ r^9} \times (a^2 du \mp ezdu)$$

cujus integralis est

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73.\ S.\ A.\ b^3.\ k\ r^9} \times (a^2 u \mp a e y),$$

quæ semi-circulo absoluto fit

$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73.\ S.\ A.\ b^3 k\ r^9} \times \frac{1}{2} k;$$

cujus duplum est retardatio anno durante facta, estque

$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73.\ S.\ A.\ b^3 r^9}$$

hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem mense synodico factam, quæ erit ergo $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^3 b^3 r^9}$

$$\times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}.$$

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ a Sole, in quâ u est $\frac{1}{4}$ k — e, et est y = b, est

$$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{109.73\ S.\ A.\ b^3 r^3} \times (\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 e}{k} - \frac{a b e}{k}.)$$

PROBL. IV.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ invenire tempus periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

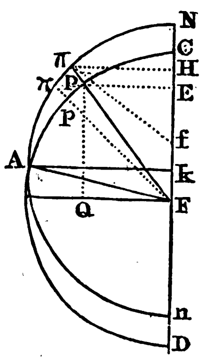
Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{S c}{M}$, tempus autem periodicum quod tempori synodico S respondet est $\frac{A S}{A + S}$, ideóque cùm illo tempore revera describatur arcus c, tempore synodico S describeretur $\frac{A + S}{A}$ c, hinc retardatio quæ fit mense synodico est $\frac{S c}{M} - \frac{A c + S c}{A}$ sive $\frac{A S c - A M c - M S c}{A M}$; quæ inventa fuit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^2 b^2 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo S = E A et M = X A, æquatio evadit E = X + E X +

$$X^3 \times \frac{a^3 q^9}{b^3 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}.$$

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ lunaris quam .05505 r facit Newtonus in hoc scholio, unde is terminus $\frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9} = 9864$, est $\frac{a^3}{b^3} = 1.$ proximè, itaque æquatio est $E = X \times \overline{1 + E} + 9972 X^3$, loco E substituatur .0804896, loco X substituatur .0744 + R et æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, et M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

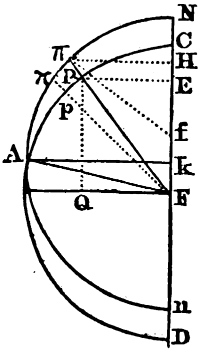
PROBL. V.

Invenire æquationem motûs medii lunaris quæ pendet ex Solis actione et quæ adhibenda est cùm Terra est in mediocri suâ distantiâ a Sole.



Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota ellipsis cujus area est $\frac{1}{2}$ b k ad aream F N A (sive $\frac{b k}{8} + \frac{b e}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa est

$$\frac{M^2 a^3 q^9 c \times (108.48 + 813.6 \times \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A.\ b^3 r^9 \times 109.73.},$$ ad tardationem quæ in motu medio continetur, et quæ est ideò $$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A b^3 r^9 \times 109.73} \times (\tfrac{1}{4} a^2 + \frac{a^2 e}{k}),$$ cujus excessus supra retardationem veram Problemate III. inventam est $$\frac{M^2 a q^9 c \times (108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2})}{S.\ A b^3 r^9 \times 109.73} \times \frac{2 a^2 e + a b e}{k}$$



sive sumendo a b pro a^2 fit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{S.\ A.\ b^3 r^9} \times$

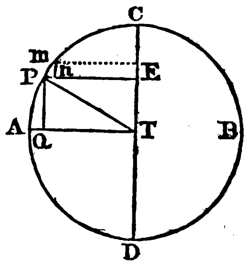
$$\frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3 e}{k} = \frac{.9972\, M^2}{S.\ A.} \times \frac{3 e c}{k}$$

(per Prob. IV.) est $\frac{3 e c}{k} = 2$ gr. 9005, est $\frac{M^2}{S\ A} = .0685042$ quod ductum in .9972 efficit .068312388, quod ductum in 2 gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′. bis efficit 11″. 52‴. &c. sed in priori calculo erat 11″. 47‴, itaque medium inter hos duos valores est 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cùm enim orbitæ lunaris figura sit admodum variabilis, et incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex hypothesi orbem Lunæ esse circularem, et in hypothesi orbem Lunæ esse ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ excentricitate orbitæ lunaris, posito verò Solem in medioeri suâ distantiâ a Terrâ semper stare, invenire æquationem motûs medii Lunæ pendentem ex vario situ apogæi Lunæ, respectu Solis.

Inventum erat in Problemate I. quod tota tardatio Lunæ, durante mense periodico, in mediocri distantiâ Terræ a Sole et in data apsidis ad quadraturam positione erat $\frac{F q^9 c}{109.73\ V a r^8} \times (108.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2 \quad 27.5575.15 f^2 n^2}{r^4})$, posito sinum anguli lineæ apsidum cum lineâ quadraturarum esse m, cosinum verò anguli esse n, sive, quod eodem redit, sinum distantiæ apsidis a syzygiâ esse n, ejus cosinum esse m; præterea inventum erat quod si linea apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$; hinc si linea apsidum discedat a syzygiâ arcu u, et fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum peripheria describitur, quæ est $\frac{A F q^9 c.}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$, ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{A F q^9 u.}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2})$,



sed cùm elementum tardationis (eodem Prob. II.) repertum sit $\frac{A F q^9 d u}{S.\ 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4})$ Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z et loco n ponendo y, et integralis erit $\frac{A F q^9}{S \times 109.73 \times V a r^8} \times (108.48 u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 APQ}{r^3})$ quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in datâ distantiâ u apogæi a Sole in antecedentia, vel Solis ab apogæo in consequentia erit $\frac{A F q^9 f^2}{S \times 109.73\ V a r^8} \times (813.6 r u - 136.0375 \times 15\ APET + 27.5575 \times 15\ APQ)$ est autem $APET = APQ + 2\,PQT$, est $r u = 2\,APT = 2\,APQ + 2\,PQT$, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15, æquatio evadit $\frac{15\ A F q^9 f^2}{109.73 \times S.\ V.\ a r^8} \times$

$(108.48\ APQ + 108.48\ PQT - 136.0375 \times APQ - 272.075\ PQT + 27.5575\ APQ$, et reductione factâ fit $\frac{15\ A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.\ V.\ a r^8} \times$ $(-163.595\ PQT.)$

Hæc æquatio negativa est cùm apogæum Lunæ ex A in C a syzygiâ ad quadraturam procedit, in quadraturâ evanescit, nam P Q T in quadraturâ fit zero: si apsis ex C in syzygiam B pergat, fit $APET = APQ - 2\ PQT$, est $ru = 2\ APT = 2\ AQP - 2\ PQT$, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas $-163.595\ PQT$ ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cùm ex syzygiâ B ad quadraturam D apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit verò in omnibus punctis syzygiarum et quadraturarum.

Cor. 1. Ex trigonometriâ notum est, quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est duplum facti sinus arcûs simpli per ejus cosinum divisum per radium; ideóque constat quod sinus arcûs dupli alterius arcûs est semper ut factum arcûs simpli per ipsius cosinum; sed areæ Q P T duplum, nempe area T Q P E, et ipsum factum sinus Q P arcus A P per ejus cosinum T Q, ergo area Q P T est ut sinus arcûs dupli arcûs A P, æquatio autem inventa est ubique ut area illa P Q T siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ apogæi Lunæ a syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis et quadraturis, iis enim in punctis Luna distat a syzygiâ vel 90 gr. vel 180 gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in octantibus; tunc enim cùm apogæum distet a syzygiâ vel 45 gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr. 270, 450, 630, &c. et horum arcuum sinus sit radius qui omnium sinuum maximus est, sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In octantibus hæc area P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, ut notum est, hinc ista æquatio evadit $\frac{40.89875 \times 15\ A F r^9 f^2}{109.73\ S.\ V \times a r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864$ tota quantitas fit

$$\frac{40.89875 \times 15 \times .00298928\ r \times A M^2}{109.73.\ S.\ A^2}$$

sed inventum est quod est $\frac{M^2}{S A} = .0685042$, et est $\frac{40.89875 \times 15}{.109.73} = 5.59082$ hinc tota æquatio est $.0011448782\ r$, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29′, &c. hinc æquatio est graduum .065590872, &c. quod ductum per 60 efficit 3′.9354, et .9354 ductum per 60, efficit 56″. Ita ut tota æquatio sit 3′. 56″, &c.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait illè, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in octantibus apogæi quando maxima est ascendit ad 3′. 45″. circiter quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantiâ a Terrâ.* Scilicet in hypothesibus nostris apsidem et Terram immotam assumpsimus, cùm id reverà non sit; ideóque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum verâ, parum tamen admodum ab illâ differet; cæterum omnes æquationis veræ leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur meritò deducentur, et eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione, non ex calculo, est petenda, differunt autem calculus et rei veritas 3″. duntaxat quod theoriæ præstantiam sufficienter probat.

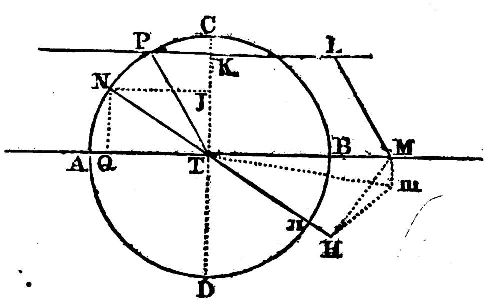
De æquatione motûs lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ nodorum, respectu lineæ syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ lunaris ad planum eclipticæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ lunaris ad planum eclipticæ admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam a Terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ lunaris dimovendo.

Sit A T B linea syzygiarum in eclipticæ plano; N T n linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; P L, L M directiones virium



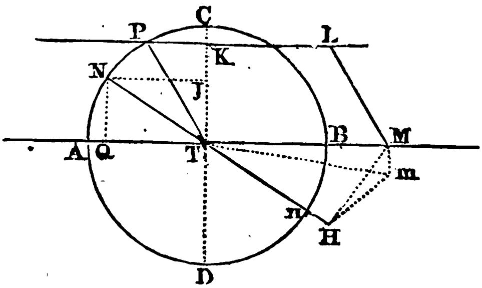
in quas resolvitur vis Solis, quarum P L est parallela T M et L M parallela radio T P.

Ducatur ex M in planum orbitæ lunaris productum perpendicularis M m, ducatur in plano orbitæ lunaris linea T m, et ex M et m ducantur perpendiculares M H, m H in lineam nodorum N n productam.

Radius T P dicatur r ut prius, distantiæ Lunæ a quadraturâ sinus P K dicatur y, cosinus T K dicatur z; distantiæ nodorum a syzygia sinus N Q sit n, cosinus T Q sit m; denique sinus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam dicatur l, existente r radio, et ea inclinatio constans supponatur, quæ secundùm Keplerum, De la Hirium, &c. est ubi maxima, graduum 5. 19'. 30''.

Ex demonstratis est $T M = 3 y$; et propter similitudinem triangulorum N T Q, M T H, est $N T (r) : M T (3 y) :: N Q (n) : M H \left(\frac{3 y n}{r}\right)$, et quia angulus M H m est angulus inclinationis orbitæ lunaris ad eclipticam, ut $r : l :: M H \left(\frac{3 y n}{r}\right) : M m = \frac{3 y n l}{r^2}$; denique ut est $T M (3 y)$ ad $M m \left(\frac{3 y n l}{r^2}\right)$ sic est r ad sinum anguli M T m qui erit ergo $\frac{n l}{r}$, cujusque cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2 l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2 l^2}{2 r^3}$.

Jam autem tota vis T M est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ lunaris



ut radius ad cosinum anguli M T m sive ut r ad $r - \frac{n^2 l^2}{2 r^3}$ et in eâdem proportione minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cùm portio totius vis T M secundùm directionem radii exercita (si planum orbitæ lunaris et eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3 y y}{r}$ ex superiùs demonstratis; pars residua propter inclinationem plani erit $\frac{F}{a} \times \frac{3 y y}{r} - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$; vis autem L M quæ est $\frac{F}{a} r$ et negative sumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc inclinatione, quippe P T est in ipsâ orbitâ lunari, ideóque ejus planum quomodocumque situm non dimovet; hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo est $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}\right)$.

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ nodorum et syzygiarum, invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. I. calculi prioris) inventum erat $\frac{2 Y d u}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}\right)$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \left(\frac{3 y y}{r} - r\right)$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times - \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$ (quæ cùm negativa sit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis elementum est $\frac{2 F d u}{V a} \times \frac{3 y^2 n^2 l^2}{2 r^5}$, cujus integralis pro quadrante est $\frac{F n^2 l^2}{V a r^5} \times \frac{3 r^2 c}{8}$ et quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3 F n^2 l^2 c}{2 V a r^3}$. Unde liquet quod cùm linea nodorum est in ipsâ lineâ syzygiarum, quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus theoriis fuit inventus, quando verò linea nodorum est in lineâ syzygiarum, tunc est $n = r$, et est acceleratio $\frac{2 F l^2 c}{2 V a r}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari, et lineam nodorum omnes possibiles positiones cum lineâ syzygiarum successivè obtinere, invenire æquationem motûs medii Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

Primò, ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani lunaris oritur, fingatur Solem immotum stare, et lineam nodorum ab eo recedere in antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cùm in Problemate præcedente omissus sit, sic enim utraque omissio sese compensant.)

Moveatur nodus ex N per arcum d u, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur d u erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo nodus describit arcum d u ad totum mensem, sed tempus quo nodus describit arcum d, u est $\frac{A\,d\,u}{c}$, nam ut tota peripheria c ad arcum d u, ita annus sidereus A ad tempus quo arcus d u describitur, quod erit ergo $\frac{A\,d\,u}{c}$, ergo ut mensis synodicus S, ad hoc tempus $\frac{A\,d\,u}{c}$, ita acceleratio uno mense facta quæ inventa est $\frac{3\,F\,l^2\,n^2\,c}{2\,V\,a\,r^3}$ ad $\frac{3\,A\,F\,l^2\,n^2\,d\,u}{2\,S.\,V.\,a\,r^3}$. Integretur pro quadrante et erit $\frac{3\,A\,F\,l^2\,r^2\,c}{2\times 8\,S.\,V\,a\,r^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3\,A\,F\,l^2\,c}{4\,S\,V\,a\,r}$, et hæc erit acceleratio motûs medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat a lineâ syzygiarum arcu u, et fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3\,A\,F\,l^2\,c}{4\,S.\,V\,a\,r}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3\,A\,F\,l^2\,u}{4\,S.\,V.\,a\,r}$ sive $\frac{3\,A\,F\,l^2}{2\,S.\,V\,a\,r^2}\times\frac{r\,u}{2}$. Sed integralis elementi $\frac{3\,A\,F\,l^2\,n^2\,d\,u}{2\,S\,V\,a\,r^2}$ quando arcus A N est u, est $\frac{3\,A\,F\,l^2\times A\,N\,Q}{2.\,S.\,V.\,a\,r^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti substracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ et accelerationis veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3\,A\,F\,l^2}{2\,S\,V\,a\,r^2}\times\left(\frac{r\,u}{2} - A\,N\,Q\right)$, sed $\frac{r\,u}{2} - A\,N\,Q$ est triangulum N Q T, et est $N\,Q\,T = \frac{n\,m}{2} = \frac{2\,n\,m}{4}$, hinc æquatio proposita sive excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S.\,V\,a\,r}\times\frac{2\,n\,m}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cùm quantitates $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S.\,V\,a\,r}$ sint constantes et $\frac{2\,n\,m}{r}$ sit sinus arcûs dupli distantiæ nodi a syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcûs dupli distantiæ nodi a syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis et quadraturis; maxima est in octantibus, cùmque sit illic $m = n = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, est $\frac{2\,n\,m}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2\,a}{A^2\,r}$, æquatio in octantibus fit $\frac{3\,M^2\,l^2}{8\,S.\,A.\,r}$, sed cùm inclinatio sit 5 gr. 19½′. cujus sinus l est .9281 r, ideóque $\frac{l^2}{r}$ est .00863 r, et $\frac{3\,l^2}{8\,r} = .00325$, cùm verò $\frac{M^2}{S.\,A}$ (per Probl. V. calc. præc.) sit .0685, hinc æquatio evadit in octantibus .000221 r; denique est $r = 57^{gr}.\ 29'$, quod ad secundas reductum efficit 206264″, et ductum per .000225 efficit 45″.6, quam Newtonus 47″ per theoriam gravitatis se invenisse profitetur.

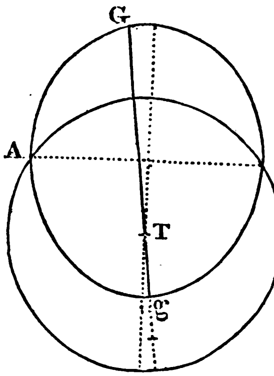
DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princip. ingeniosissimam excogitavit rationem motum apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ lunaris orire-tur, sicque inveniri curvam per motum corporis in ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; eidem methodo mox insistemus et ex eâ leges motûs apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motûs quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; itaque aliam indicare methodum rem eamdem æstimandi, priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

PROBL. I.

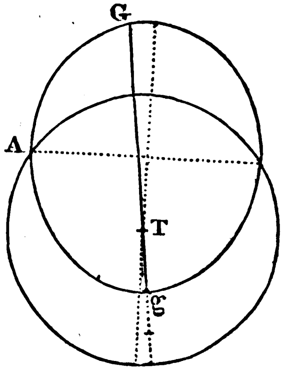
Sol supponatur immotus; linea apsidum qualemcumque angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y; invenire motum apogæi dum Luna ab apogæo ad apogæum redit.

Sit G A g ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G apogæum, g perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia apogæa; T—2 f distantia perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo ellipsim suam describit, et vis centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{d\,u^2}{2\,r}$ ex notâ circuli proprietate.



Portiones d u ejus circuli ubique æquales intelligantur, et sumantur in ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcûs illius d u ductas; liquet, quod dum arcus illi elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex tangente ad ellipsin reducetur, erunt effectus vis centralis Terræ et vis Solis secundum directionem radii orbitæ lunaris, conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem Terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inversè ut quadrata distantiarum a centro, ideóque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2 r X^2}$; et secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus d u; illæ verò areæ cùm sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus d u mensuratos) erunt ut X^2, ideóque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; ideóque vis centralis Terræ



effectus, dum describitur area quæ respondet arcui d u, erit ubique $\frac{r^2 du^2}{2 r X^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 du^2}{2 r^3}$. In apogæo erit $\frac{T^2 du^2}{2 r^3}$ in perigæo $\frac{T^2 du^2}{2 r^3} - \frac{4 T f du^2}{2 r^3}$, &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, et quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideóque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui d u est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $- \frac{10 T^4 f}{r^5}$ Y, &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terrâ a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et vim Lunæ in mediocri distantiâ esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis periodicus, sed sepositâ Solis actione) cùm ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et in quâlicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$.

Hinc fluxio secunda orbitæ lunaris; hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter tangentem et curvam lunarem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis centralis Terræ et vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui d u percurritur, erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times (\frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r})$.

Hæc fluxio in apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times (\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r})$; in perigæo verò erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{T^5}{r^5} - \frac{10 T^4 f}{r^5}) \times (\frac{3yy}{r} - r)}$; ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur,) et si perigæum esset e diametro oppositum apogæo, tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in apogæo quàm in perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$ vera ellipsis describeretur, hic effectus virium in apogæo deberet esse ad earum effectum in perigæo, primò inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directè, hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4 T f$, dividatur ergo effectus virium in apogæo per T^2 et ducatur in $T^2 - 4 T f$ effectus virium in perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{T^5}{r^5} - \frac{4 T^4 f}{r^5}) \times (\frac{3yy}{r} - r)}$: sed in perigæo ut et in apogæo ex naturâ apsidum evanescit fluxio distantiæ X ut pote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus virium Terræ et Solis, ideò fluens hujus effectus virium reverâ evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut

$$\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r = o;$$

sed in perigæo, spectatâ actione Terræ et Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times$

$$\overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r.$$

Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T^4 f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r.$

Punctum itaque perigæi non erit in puncto e diametro opposito apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ a Terrâ, circa puncta apogæi vel perigæi non multum mutantur, ideóque si perigæum arcu p transferatur, non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis Terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco d u, et differentia sinuum pro d y) fiet itaque fluxio secunda orbitæ lunaris in loco in quo perigæum esse debebit

$$\frac{du^2}{2r} \times \left\{ \frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \left(3y^2 + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2 p^2}{r^2}\right) \times \frac{1}{r} - r \right\}$$

cujus pars

$$\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \left(\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}\right) \times \frac{3yy}{r}} - r$$

fluentem habet æqualem zero; fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \left(\frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r}} - r\right)$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) et habebitur valor p, quâtenus desig nat arcum quo processit perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2 T^4 du}{2Ar^8}$ habetur hæc æquatio

$$Tp \times \int \frac{yz\,du}{r} = f \times \int \overline{3yy\,du - rr\,du},$$

sive quia $y\,du = -r\,dz$ fit $Tp \times \int -z\,dz = f \times \int \overline{-3ry\,dz - r^2\,du}$. Est autem $\int -z\,dz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ et $\int - y\,dz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2}ru$, dempto vel assumpto triangulo cujus area est $\frac{1}{2}yz$; hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}Tp \times (rr - zz) = f \times (\frac{3}{2}r^2 u - \frac{3}{2}ryz - r^2 u,)$ sive $Tp \times yy = f \times (r^2 u - 3ryz,)$ unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cùm hic sit motus perigæi quo tempore Luna fertur ab apogæo ad perigæum, erit motus apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab apogæo ad apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus apsidum nullus est cum $ru - 3yz = o$; in quadraturis verò fit negativus; regrediuntur itaque apsides; maximus autem est in syzygiis et positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4}c$, et $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab apogæo ad perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret ellipsim, perigæum non faceret cum quadraturâ eumdem angulum quem faciebat apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

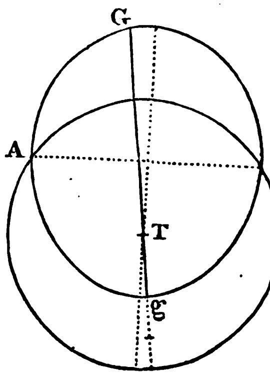
Invenire quantitatem motûs apsidum singulo anno.

Sit apogæum in quadraturâ, et Sole procedente apogæum inde versus syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem respectu apogæi Lunæ absolvit, dicatur ϖ tempus quo Luna ab apogæo ad apogæum redit, sit c tota peripheria quam Sol apogæi respectu describit, et d u arcus ejus exiguus quo apogæum a quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum descripserit erit $\frac{a\,du}{c}$, et cùm tempore ϖ, apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.\,yy} \times (ru - 3yz)$ tempore $\frac{a\,du}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\varpi.\,Tc} \times (\frac{ru\,du}{y^2} - \frac{3yz\,du}{y^2})$, erit autem u arcus qui metitur distantiam apogæi a quadraturâ, y ejus sinus, et z ejus cosinus, et $du = \frac{r\,dy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2afr}{\varpi.\,T.\,c} \times (\frac{ru\,du}{y^2} - \frac{3zy\,du}{y^2},)$ fit $\frac{2afr}{\varpi.\,T.\,c} \times (\frac{ru\,du}{y^2} - \frac{3r\,du}{y}.)$

Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{ru\,du}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{115\,2\,r^8} + \frac{63y^{11}}{2816\,r^{10}}$, &c. fiet $\frac{ru\,dr}{yy} =$

$\frac{r\,d\,u}{y}+\frac{y\,d\,u}{6\,r}+\frac{3\,y^3\,d\,u}{40\,r^3}+\frac{5\,y^5\,d\,u}{112\,r^6}+$, &c. et dividendo $r\,d\,u$ per valorem y, qui est $u-\frac{u^3}{6\,r\,r}+\frac{u^5}{120\,r^4}-\frac{u^7}{5040\,r^6}$ est $\frac{r\,d\,u}{y}=\frac{r\,d\,u}{u}+\frac{u\,d\,u}{6\,r}+\frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3}+\frac{31\,u^5\,d\,u}{15120\,r^5}$; et loco $y\,d\,u$ in sequentibus terminis ponendo $-r\,d\,z$ et loco y^2 ejusque dignitatum ponendo r^2-z^2 ejusque dignitates, fit $\frac{r\,u\,d\,u}{y\,y}=\frac{r\,d\,u}{u}+\frac{u\,d\,u}{6\,r}+\frac{7u^3du}{360.r^3}$, &c. $-\frac{r\,d\,z}{6\,r}+\frac{3}{40}\times\frac{\overline{rr-zz}\times-rdz}{r^3}+\frac{5}{112}\times\frac{\overline{rr-zz}|^2\times-r\,d\,z}{r^6}+\frac{35}{1152}\times\frac{\overline{rr-zz}|^3\times-r\,d\,z}{r^8}+\frac{63}{2816}\times\frac{\overline{rr-zz}|^4\times-r\,d\,z}{r^{10}}$, &c. Cujus quantitatis fluens est r L. $u+\frac{u^2}{12\,r}+\frac{7\,u^4}{1440\,r^3}$, &c. $+\frac{r\,r-r\,z}{6\,r}+\frac{3}{40}\times\frac{\frac{2}{3}r^4-r^3z+\frac{1}{3}r\,z^3}{r^3}+\frac{5}{112}\times\frac{\frac{8}{15}r^6-r^5z+\frac{2}{3}r^3z^3-\frac{1}{5}r\,z^5}{r^5}+\frac{35}{1152}\times\frac{\frac{16}{35}r^8-r^7z+r^5z^3-\frac{3}{5}r^3z^5+\frac{1}{7}r\,z^7}{r^7}+\frac{63}{2816}\times$



$\frac{\frac{128}{315}r^{10}-r^9z+\frac{4}{3}r^7z^3-\frac{6}{5}r^5z^5+\frac{4}{7}r^3z^7-\frac{1}{9}r\,z^9}{r^9}$ cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3\,r\,d\,y}{y}$ quæ est $-3\,r$ L. y et omne ducatur per $\frac{2\,a\,f\,r}{\varpi\,T\,c}$ habetur motus apogæi dum propter Solis motum apsis recessit a quadraturâ arcu u.

Si ergo u sit quadrans, y erit r, et z fiet zero, unde hæc expressio evadet $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\varpi\,T\,c}\times(r$L. $\frac{1}{4}c+\frac{\frac{1}{16}c^2}{12\,r}+\frac{\frac{7}{256}c^4}{1440\,r^3}$, &c. $+\frac{r}{6}+\frac{3}{40}\times\frac{2}{3}r+\frac{5}{112}\times(\frac{8}{15}r+\frac{35}{1152}\times\frac{16}{35}r+$, &c. $-3\,r$ L.r) $=\frac{2\,\alpha\,f\,r^2}{\pi.\,T\,c}\times($L. $\frac{\frac{1}{4}c}{r\,4}+\frac{c^2}{192\,r^2}+\frac{7\,c^4}{[illegible]}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{10\times11}$,&c.) harum fractionum $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}$, &c. summa variis modis haberi potest, et quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cùm radius est unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cùm quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, et sequentes per fractiones minores quàm $\frac{1}{3}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, et .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\,\alpha\,f}{\varpi\,T\,c}\times($L $\frac{1}{4}c+\frac{c^2}{192}+.30205)$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super radium, per naturam logarithmorum fiet L. $\frac{1}{4}c=g-\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{3}g^3-\frac{1}{4}g^4+$, &c. $=.57079-.16290+.06196-.02652+.01211-.00576=.4496$, unde expressio inventa fit $\frac{2\,\alpha\,f}{\varpi\,T\,c}\times(.4496\,r^2+\frac{c^2}{192}+.30205\,r^2)=\frac{2\,\alpha\,f}{\varpi\,T}\times(\frac{.75165\,r^2}{c}+\frac{c}{192})=\frac{\alpha\,f}{\varpi\,T}\times(\frac{1.5033\,r^2}{c}+\frac{c}{96})$ sive quia est $\frac{c}{96}=3^{gr}.75$, et $\frac{r^2}{c}=\frac{r}{6.283188}=9^{gr}.1189$ et $\frac{1.5\,r^2}{c}=13^{gr}.6783$, habetur motus apogæi durante quadrante $\frac{f}{T}\times\frac{\alpha}{\varpi}\times17^{gr}.4283$ et durante totâ revolutione $\frac{f}{T}\times\frac{\alpha}{\varpi}\times69^{gr}.7132$, sed ut totum tempus α qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T}\times\frac{\alpha}{\varpi}\times69^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T}\times\frac{A}{\varpi}\times69^{gr}.7132$; præterea sit P mensis periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T}\times\frac{A}{\varpi}\times69^{gr}.7132$ ad motum apsidum tempore periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T}\times\frac{P}{\varpi}\times69^{gr}.7132$, et ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T}\times\frac{P}{\varpi}\times69^{gr}.7132$, ad motum apsidum mense anomalistico ϖ qui erit $\frac{f}{T}\,69^{gr}.7132$, et ut 360 ad $360+\frac{f}{T}\times69^{gr}.7132$ ita P ad mensem anomalisticum ϖ qui ergo erit $P\times(1+\frac{f}{T}\times\frac{69^{gr}.7132}{360})$; ideóque motus annuus apogæi erit $\frac{f}{T} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times (1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360})}$, sed annus tropicus est $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ lunaris est quidem variabilis, de ejus legibus posthac; excentricitatis valorem mediocrem assumit Newtonus .05505 si radius sit 1, Ill. Cassinus eam paulo minorem facit, nempe .05430; ex legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f scribi debet .05147 et loco T, 1.05147 unde motus apsidum fiet $\frac{.04895 \times 13\frac{1}{3} \times 69^{gr}.7132}{360 + .04895 \times 69.7132} 360 = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126}$ $= 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per observationes 40^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundùm Newtoni methodum.

Hic revocanda sunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta sunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. PROP. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipsam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in singulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, et eâ quæ ex revolutione plani orbitæ pendet: hæc ubique erit inversè in triplicatâ ratione distantiæ a centro.

Demonstrationem vide Propositione suprà indicatâ.

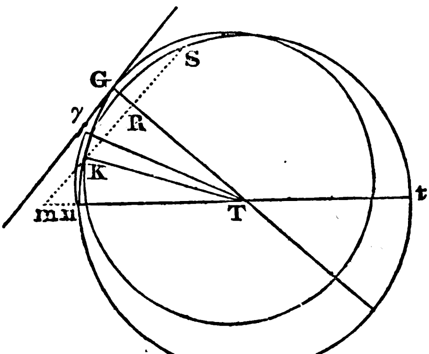
LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, sit quantitas quæ in mediocri distantiâ sit constans, dicaturque Y, crescat verò ut distantia a Terrâ, vis Terræ in distantiâ mediocri sit V, dico quod (ponendo orbitam lunarem circulo satis finitimam esse) motus Lunæ concipi poterit quasi fieret in ellipsi simili illi quam reverâ describit, sed cujus planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione apsis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 Y}}$; demonstratio est in exemplis tertiis ad Propositionem XLV. sed eam demonstrationem hic breviter trademus.

Sit G Lunæ apogæum, G K arcus quàm minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore describeret, transferatur verò Luna cum suo plano ita ut ejus apsis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuisset; motus Lunæ in G ex duobus compositus censeatur, nempe ex motu secundum tangentem per velocitatem acquisitam, et ex motu per vim centralem genitam quæ simul ac semel in puncto G agere censeatur, hic motus per G R repræsentetur, motus secundum tangentem per R K, fiat verò R K ad R m, ut angulus G T K ad G T K + G T γ, et si nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cùm debuisset esse in K, sed quia T m est longior quàm T K sumatur T n = T K et reverâ Luna erit in n, et erit m n effectus vis centralis ex revolutione plani genitus dum Luna descripsisset arcum G K.

Radio T K centro T describatur circulus quem m T producta secet in t et m K producta secet in S, erit m n $\times$ m t = m K $\times$ m S per Cor. Prop. XXXV. Elem. III. Eucl. ideóque erit $m n = \frac{m K \times m S}{m t}$ et si fingatur hunc circulum quam proximè coincidere cum arcu orbitæ lunaris G K, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit G R effectus vis centralis Terræ dum Luna descripsisset arcum G K, et per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{\overline{R K}|^2}{2 G T}$.

Ergo cùm effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, et effectus vis centralis Terræ eodem tempore geniti sint m n et G R, vires illæ erunt uti m n et G R, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{m K \times m S}{m t}$ et $\frac{R K^2}{2 G T}$ sed cùm



m t sit quam proximè 2 G T, sitque m S = m R + R K, et m K = m R — R K, istæ vires sunt ut m R^2 — R K^2 ad R K^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T — X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis Terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}$ V vis centralis Terræ in puncto T, ideóque, cùm sit R K^2 ad m R^2 — R K^2 ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam, hæc erit, $\frac{r^2 V \times m R^2 - r^2 V \times R K^2}{T^2 \times R K^2}$.

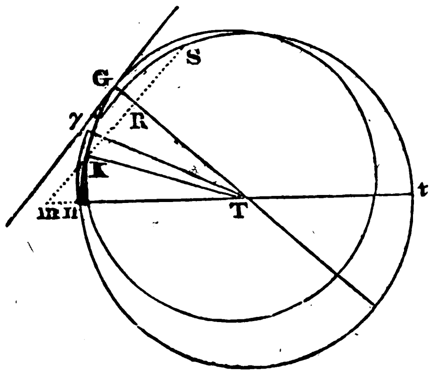
In puncto K aut alio quocumque ubi T K

est T — X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{\overline{T-X}|^2}V$ t quoniam vires ex revolutione plani genitæ sunt inversè in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{T.r^2.V\times mR^2 - Tr^2V\times RK^2}{\overline{T-X}|^3\times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}|^3\times RK^2}$.

Sed cùm in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{\overline{T-X}|^2}V$, et vis substractitia Solis sit ut distantiæ, ideóque sit $\frac{T-X}{r}Y$, si reducantur ad communem denominatorem $\overline{T-X}|^3$ fient

$$\frac{Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}}{\overline{T-X}|^3}$$

Ut autem æquipolleat plani revolutio cum substractione vis Solis, ita determinandæ sunt quanti-



tates R K² et m R², ut expressiones harum virium sint ubique æquales, et 1. quidem cùm X fit zero, vis gravitatis cum vi plani est $\frac{Tr^2V\times mR^2}{\overline{T-X}|^3\times RK^2}$ et vis gravitatis substractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}|^3}$. Oportet ergo ut sit m R² $=\frac{\overline{RK}|^2}{r^2V}\times\left(r^2V - \frac{T^3Y}{r}\right)$. Termini verò reliqui in quibus est X sunt $-\frac{Xr^2VRK^2}{T.\overline{X}|^3 - RK^2}$ et $-\frac{Xr^2V + 4T^3X\frac{Y}{r}}{(T-Y)^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK}|^2}{r^2V}\times\left(r^2V - 4T^3\frac{Y}{r}\right)$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substractitia Solis, oportet ut sit m R² ad R K² ut $r^2V - \frac{T^3Y}{r}$ ad $r^2V - \frac{4T^3Y}{r}$, sive ut sit m R ad R K ut $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ unde cùm sit m R ut motus Lunæ et apogæi conjunctim et R K ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360^{gr}. fiet ut $\sqrt{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ita 360^{gr}. ad Lunæ et apogæi motum conjunctim, qui erit ergo $360\times\sqrt{\frac{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}}$, itaque si ex hoc valore tollantur 360^{gr}. residuum erit motus apogæi in tegrâ revolutione Lunæ. Q. e. o.

THEOR. I.

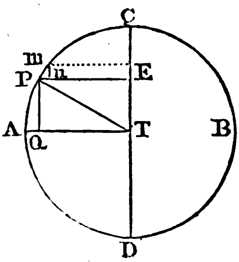
Invenire motum apogæi lunaris, supponendo orbitam lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum d u, et eo durante vis Y constans maneat, et spectatur d u quasi portio ellipsecs descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; motus apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lem. II.) $c\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3r}} - c$, ideóque durante tempore quo arcus d u percurritur, foret $du\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}} - du$, sit r = T, et sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V-Y}{V-4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motûs apsidum est $\frac{3r}{2V}du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a}\times\left(\frac{3yy}{r} - r\right)$. fit $\frac{3F}{2Va}\times\left(\frac{3yydu}{r} - rdu\right)$, cujus integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va}\times\left(\frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}\right)$ et pro circulo $\frac{3F}{2Va}\times\frac{rc}{2}$ et cùm $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA}c$ sive cùm $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus apsidum .0041 c = $1^d.476$ sive $1^d. 28'. 33''$, et quia is absolvitur mense synodico, ut habeatur motus apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}. 267$ sive $18^{gr}. 16'$, quod est circiter dimidium veri motûs apsidis ut observat Newtonus.

THEOR. II.

Invenire leges motûs apogæi Lunæ supponendo orbitam lunarem esse ellipticam.

Distantia Lunæ apogæa dicatur A, perigæa dicatur P, sinus anguli apogæi et lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et vis Solis agens in perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, et y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$; siquidem est constans; vis Solis substractitia aut addititia in apogæo ac perigæo erit A C vel P C; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari, tunc per Cor. 2. Prop. XLV., et exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab apside ad apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}}$, si V sit ut vis gravitatis Terræ in data distantia, est verò $360 \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}} = 360 \times (1 + \frac{3C}{2V})$, ideóque motus apsidis erit $360 \times$



$\frac{3C}{2V}$ tota revolutione synodico-anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ resumamus, et fingatur talem esse apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare et apogæum ejus respectu in antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore α absolvere, sit ergo c tota peripheria, apsis percurret respectu Solis arcum d u tempore $\frac{\alpha\, du}{c}$; ideò tempore synodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motu suo, tempore $\frac{\alpha\, du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Y du}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times (\frac{3yy}{r} - r)$ et $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motûs apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times (3yy\,du - r^2 du)$, cujus integralis est (si fingatur apogæum a quadraturâ ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times (3.r \int. y\,dz - r^2 u)$ est autem $\int. y\,dz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times (3CPE - ru)$ et pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ et pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus apogæi proportionalis tempori, dum apogæum discedet a Sole arcu u, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cùm revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times (3CPE - ru)$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times (\frac{3ru}{2} - 3CPE)$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per constr. hinc æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcûs dupli distantiæ a Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcûs dupli distantiæ apogæi a Sole, unde lex æquationis habetur, quod sit maxima in octantibus, nulla in syzygiis et quadraturis, positiva a quadraturis ad syzygias, negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda, siquidem, ut observatum est, hypotheses adhibitæ, utut a motu apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in notis subsequentibus plura.

DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

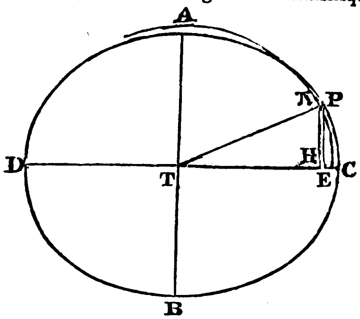
Ipsa curva quam Luna describit, posset determinari per calculum adhibitâ ejus curvæ fluxione secundâ, quæ obtinetur subtrahendo vim solarem a vi Terræ; audivimus autem viros in mathesi primarios hoc Problema, quod certe non est exiguæ difficultatis, suum fecisse; cùm autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quàm per approximationes quasdam, eadem methodo, tenui nostro modulo magis accommodatâ, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri quæsivit Newtonus qualis foret orbita lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, et invenit quod si assumatur eam orbitam fieri ellipsim per Solis actionem, ea ellipsis Terram in centro haberet, et ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r + p$, semi-axis minor 69 sit $r - p$, distantia Lunæ a Terrâ in loco quovis dicatur

$r + x$, sit y sinus distantiæ Lunæ a quadraturâ proximâ, z ejus distantiæ cosinus erit ubivis $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Nam sit $T\pi = r$, $TP = r + x$, $\pi H = y$, $TH = z$; propter triangula similia TPE, $T\pi H$ est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ et $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam ellipseos est $\frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \overline{r+p}|^2 - \frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2$; unde est $\overline{r-p}|^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} \times \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}|^2}{\overline{r+p}|^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}|^2 = \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}|^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ et quia $y^2 + z^2 = r^2$, et formatis dignitatibus omissisque



terminis in quibus p, vel x, ad secundam dimensionem assurgunt, habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r} =$ sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus et transpositione factâ et divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideóque $x = p \times (1 - \frac{2y^2}{r^2})$.

Ex quo sequitur quod in octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur verò orbitam lunarem ellipticam citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem esse Y, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, sed eam tantùm partem ejus actionis considerari quæ secundum orbitæ radium agit, omissâ illâ parte ejus actionis solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, et magis oblongam evadere dum apsides sunt in syzygiis quàm dum sunt in quadraturis, excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum apsides sunt in syzygiis, mediocrem cùm apsides sunt in octantibus, cùm sunt in quadraturis minimam, et ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis leges et quantitas rudi Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole et lineâ apsidum immotis, item omissâ eâ actionis solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ lunaris agit; dico quod si describatur ellipsis, cujus Terra sit focus et cujus axis major sit linea inter Lunæ apogæum et perigæum interjacens, orbita lunaris erit contenta intra eam ellipsim cùm apsides erunt in syzygiis, erit verò extra eam ellipsim cùm apsides erunt in quadraturis, cùm verò apsides erunt in octantibus, orbita lunaris cum eâ ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times (\frac{3yy}{r} - r)$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cùm distantia apogæa sit $r + f$, distantia perigæa sit $r - f$, et ea distantia quæ est perpendicularis in axem, et quæ est semilateri recto ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; distantia apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$, et distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet. Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; excentricitas verò est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; ex ellipseon autem naturâ, semi-latus rectum ellipseos cujus hic foret axis major et hæc foret excentricitas, evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - \frac{\overline{1 + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{12y^2}{r^2} - 4)}|^2}{r + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3y^2}{r} - r)} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times$

$\overline{\frac{3y^2}{r}-r}-f^2\times(\frac{1}{r}+\frac{7M^2}{A^2r^2}\times\overline{\frac{3y^2}{r}-r})$, sed ea distantia perpendicularis est in curvâ lunari $r-\frac{f^2}{r}+\frac{M^2}{A^2}+\overline{\frac{3z^2}{r}-r}-\frac{4M^2f^2}{A^2r^2}\times(\frac{3z^2}{r}-r)$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in ellipsi et eam distantiam in orbitâ lunari, est $\frac{3M^2}{A^2r}\times(y^2-z^2)-\frac{M^2f^2}{A^2r^3}\times(21y^2-12z^2-8r^2)$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2r}\times(y^2-z^2)$. Si apsides sunt in syzygiis, est $y=r$, et $z=o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in ellipsi excedit distantiam in orbitâ lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; si apsides sunt in quadraturis, fit $y=o$, et $z=r$, unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2r}\times(y^2-z^2)$ evadit $-\frac{3M^2r}{A^2}$, ideó quod distantia perpendicularis in ellipsi minor est distantiâ in orbita lunari, unde fit ut orbita lunaris contineat intra se ellipsim; si verò apsides sint in octantibus, evanescit y^2-z^2 hinc ipsa orbita lunaris cum ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ lunaris, exhibet orbitæ lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ; nam sive apsides sint in syzygiis sive in quadraturis, liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam syzygiarum, contrahi verò secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis solaris totius, sed semotâ excentricitatis orbitæ lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammod. teneamus viam, jungemus incremento distantiæ lunaris secundum hypothesim Theor. VII. calculi 2. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; unde sic medium quoddam inter ambas hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia x evadet $x+\frac{x^4}{r^3}\times\frac{Y}{V}+\frac{n}{m}py\times(1-\frac{2y^2}{r^2})=x+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3x^4y^2}{r^5}-\frac{M^2\times x^4}{A^2\times r^3}+\frac{n}{m}p\times\overline{1-\frac{2y^2}{r^2}}$.

PROBL. I.

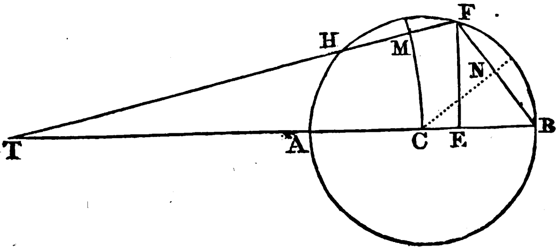
Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, et supposito orbitam lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, ellipsi proximam esse, invenire leges excentricitatis orbitæ lunaris.

Primò cùm distantia apogæa sit $r+f$, hæc distantia loco x substituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r+f+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3r^4y^2+12r^3fy^2}{r^5}-\frac{M^2\times(r^4+4r^3)}{A^2r^3}+\frac{n}{m}p\times(1-\frac{2y^2}{r^2})$; ut habeatur distantia mediocris loco x scribatur r, sinus autem ejus distantiæ a quadraturâ proximâ est quam proxime cosinus distantiæ apogæi a quadraturâ proximâ, ideóque loco y scribatur z, fit $r+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3z^2}{r}-\frac{M^2r}{A^2}+\frac{n}{m}p\times\overline{1-\frac{2z^2}{r^2}}$ quæ substracta ex distantiâ apogæâ relinquit excentricitatem $f+\frac{M^2}{A^2}\times\frac{3r^4\times\overline{y^2-z^2}+12rfy^2}{r^5}+\frac{M^2}{A^2}\times4f-\frac{2np}{m}\times\frac{y^2-z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f+\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}\times\frac{y^2-z^2}{r^2}$; hinc illius excentricitatis hæ sunt leges.

1. Excentricitas est maxima cùm apsides sunt in syzygiis, nam illic y fit r, et $z=o$, hinc excentricitas evadit $f+\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$.

2. Excentricitas est minima cùm apsides sunt in quadraturis, illic enim est $y=o$ et $z=r$, unde excentricitas evadit $f-\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$.

3. Excentricitas est mediocris cùm apsides versantur in octantibus, estque $=f$, quia $y^2=z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}\times\frac{y^2-z^2}{r^2}$.



4. In aliis quibuscunque locis hâc constructione obtinetur fere excentricitas, sumatur $TC=f$, $CB=\frac{3M^2r-\frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, hoc radio

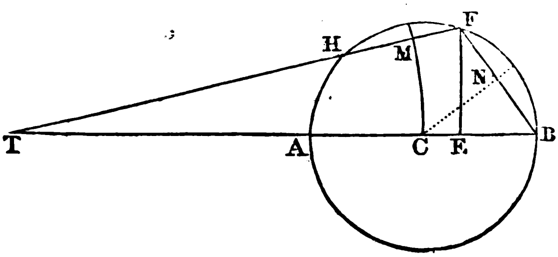
C B describatur circulus in quo sumatur B F æqualis duplæ distantiæ apsidum a syzygiâ, erit satis proximè C F excentricitas, nam centro T radio T C describatur arcus C M, cùm fit perpendicularis in lineam T H M F, et is arcus parum discedat a lineâ rectâ, punctum M erit medium lineæ H F per III. 3 Elem. et M F erit æqualis cosinui C E arcûs B F.

Radius C B ad compendium dicatur g, et quia sinus dimidii arcûs B F in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit $B\,N = \frac{g}{r}\,z$, et juxta nota trig. Theor. ut C B (g) ad B N $\left(\frac{g}{r}\,z\right)$ sic F B $\left(\frac{2\,g\,z}{r}\right)$ ad $E\,B = \frac{2\,z\,z}{r\,r}\,g$, et $C\,E = g - \frac{2\,z\,z}{r\,r}\,g = g \times \frac{r\,r - 2\,z\,z}{r\,r}$, sed $r\,r - z\,z = y\,y$, hinc $C\,E = g \times \frac{y\,y - z\,z}{r\,r}$, ideóque T F sive T E

$$= f + \frac{3\,M^2 . r - \frac{2\,n}{m}\,A^2\,p}{A^2} \times \frac{y\,y - z\,z}{r^2}$$

ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia ellipsis nonnihil discederet a loco perigæi Lunæ per easdem hypotheses



determinato, si verò ex distantiâ perigæâ cum distantiâ apogæa collatis excentricitas quæreretur, diversa quidem ejus quantitas obtineretur, sed eædem forent leges, nam distantia apogæa foret $r + f + \overline{r + 4\,f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}\,p \times (1 - \frac{2\,y^2}{r^2})$ et perigæa $r - f + \overline{r - 4\,f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}\,p \times \overline{1 - \frac{2\,y^2}{r^2}}$ hinc axis major esset $2\,r + 2\,r \times \frac{Y}{V} + \frac{2\,n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2\,y^2}{r^2}}$ et semi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}\,p \times \overline{1 - \frac{2\,y^2}{r^2}}$; excentricitas verò $f + 4\,f \times \frac{Y}{V}$ sive $f \times (1 + \frac{4\,M^2}{A^2\,r}) \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r)$. Quæ quidem est maxima cùm apsides sunt in syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times (1 + \frac{8\,M^2}{A^2})$. In quadraturis fit minima quia evanescit y, ideóque fit $f \times (1 - \frac{4\,M^2}{A^2})$, hinc mediocris excentricitas est $f \times (1 + \frac{2\,M^2}{A^2})$, quod evenit in octantibus, tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}\,r^2$, ideóque $\frac{3\,y^2}{r} - r = \frac{1}{2}\,r$, fit ergo $f \times (1 + \frac{4\,M^2}{A^2\,r}) \times \frac{1}{2}\,r = f \times (1 + \frac{2\,M^2}{A^2})$. In cæteris locis sumatur $T\,C = f \times (1 + \frac{2\,M^2}{A^2})$ et $C\,B = \frac{6\,M^2}{A^2}\,f$, et si C B dicatur g ut in Probl. præcedente erit $C\,E = g \times \frac{r\,r - 2\,z\,z}{r\,r} = g \times \frac{r\,r - 2\,r\,r + 2\,y\,y}{r\,r} = g \times \frac{2\,y\,y - r\,r}{r\,r}$ ideóque $T\,E = f \times (1 + \frac{2\,M^2}{A^2} + \frac{6\,M^2}{A^2}) \times \frac{2\,y\,y - r\,r}{r\,r} = f \times (1 + \frac{2\,M^2}{A^2\,r} \times r + \frac{4\,M^2}{A^2\,r} \times \frac{3\,y\,y}{r} - \frac{6\,M^2}{A^2\,r} \times r) = f \times (1 + \frac{4\,M^2}{A^2\,r}) \times (\frac{3\,y^2}{r} - r)$ quæ est excentricitas reperta, et eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique, sicut astronomis solemne est, axim majorem constantem assumamus, et semi-axis major dicatur r, qui ex distantiâ apogæâ subducatur ut habeatur excentricitas, eædem ejus excentricitatis leges iterum obtinebuntur; erit quippe excentricitas $f + r + 4\,f \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}\,p \times (1 - \frac{2\,y^2}{r^2})$ sive $f + \frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r) + \frac{4\,M^2\,f}{A^2\,r} \times \overline{\frac{3\,y\,y}{r} - r} + \frac{n}{m}\,p \times \overline{1 - \frac{2\,y^2}{r^2}}$; quæ fit in syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2\,M^2\,r}{A^2} + \frac{8\,M^2\,f}{A^2} - \frac{2\,n\,p}{m}$, in quadraturis ubi y evanescit $f - \frac{M^2\,r}{A^2} - \frac{4\,M^2\,f}{A^2\,f} + \frac{n}{m\,p}$. Unde mediocris excentricitas est $f + \frac{M^2\,r}{2\,A^2} + \frac{2\,M^2\,f}{A^2} - \frac{n\,p}{2\,m}$, quæ quidem etiam in octantibus circiter occurrit, quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3\,y\,y}{r} - r) + \frac{4\,M^2\,f}{A^2\,r} \times \overline{\frac{3\,y\,y}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^2\,r}{2\,A^2} + \frac{M^2}{A^2}$ in octantibus, nam cùm y^2 illic sit $\frac{1}{2}\,r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times (\frac{3\,r\,r}{2\,r} - r) + \frac{4\,M^2\,f}{A^2\,r} \times \frac{3\,r\,r}{2\,r} - r = \frac{M^2\,r}{2\,A^2} + \frac{2\,M^2\,f}{A^2}$.

† Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui; quod motus lunares per theoriam gravitatis a causis suis computari possint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motûs Lunæ oriatur a variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo Solis major est, et orbem Lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, et orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; et æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, (i) in apogæo et perigæo Solis nulla est, (k) in mediocri Solis a Terrâ distantia ad 11′. 50″.

PROBL. II.

Variationis excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ, quam sequitur Luna, potest determinari, quâ non inventâ ad observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, et maximum incrementum vel decrementum assumit $1172\frac{1}{2}$, tam ex observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro æquatione apogæi commodus esset, ut suo loco dicemus.

Illust. Cassinus mediocrem illam excentricitatem facit 5430 incrementum verò et decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. I. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; nam, id incrementum aut decrementum inventum fuerat $\frac{3 M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cùm excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3 r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12 r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum apsides sunt in syzygiis et $z = o$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times (3r + 12f) + \frac{M^2}{A^2} \times (4f - p)$, et cùm sunt in quadraturis ubi $z = r$ et $y = o$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times (4f + p)$, unde mediocris excentricitas est $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10 f$, et incrementum vel decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{3r + 6f} - p$.

Cùm itaque sit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris excentricitas $(1 + \frac{10 M^2}{A^2}) \times$ (quam Cassinus invenit 5430 et Newtonus 5505) est $1.055\ f$, hinc est $f = 5147$ secundùm Cassinum et 5218 secundùm Newtonum, quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cùmque p sit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex posteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 et 1086 quos pro excentricitatis variatione assignant Newtonus aut Halleius et Cassinus.

(†) * *Hisce motuum*, &c. Hæc est enim veritatis ejus theoriæ fortissima probatio, si ea quæ mathematicè deducuntur ex eâ theoriâ apprimè consentiant cum phænomenis in casu maximè composito.

(h) * *Hæc vis in perigæo Solis major est et orbem Lunæ dilatat;* vis Solis al quando adjungitur vi Terræ ut Lunam versus Terram attrahat, aliquando idque sæpiùs et ubi fortiùs agit, vi Terræ est opposita, et Lunam a Terrâ distrahit, itaque toto effectu vis Solis simul considerato, Luna per eam vim a Terrâ distrahitur, et eò magis quò ea vis Solis major est, ideóque Luna magis a Terrâ distrahitur dum Terra versatur in suo perihelio quàm ubi versatur in aphelio: hinc primo casu orbita Lunæ magis est dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In apogæo et perigæo Solis nulla est:* id omninò liquet ex Cor. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario statuuntur liquet quod ut habeatur æquatio quovis in loco, hæc proportio est instituenda, ut areæ ellipseos quam Terra describit dimidium ad aream descriptam a Terrâ ab aphelio (vel perihelio) usque ad eum locum propositum, ita semestris tardatio ad tardationem mediocri motui adscriptam, sed in hoc casu ea area a Terrâ descripta est ipsa semi-ellipsis, ergo etiam tardatio medio motui adscripta est ipsa semestris tardatio; tum verò sumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, et differentia est æquatio quæsita; sed rursus ea tardatio aphelio aut perihelio conveniens est ipsa semestris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adscriptâ, detractâ nullum est residuum, cùm planè sint æquales, ergo æquatio in apogæo ac perigæo nulla est.

(k) * *In mediocri Solis distantiâ*, &c. Videntur hæc verba statuere quid constet ex observationibus, nempe hanc æquationem esse 11′. 50″. ubi maxima est, et esse æquationi centri proportionalem, observavimus autem Ill. Cassinum circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis est; et additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, et in oppositâ orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000 et eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, (l) hæc æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, et auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, et æquatio maxima erit 11′. 51″.

(m) Inveni etiam quod in perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, apogæum et nodi Lunæ velocius moventur quàm in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri Solis proportionales.

hanc æquationem ubi maxima est 9′. 44″. efficere.

(l) *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit* 11′. 49″. Sumptâ orbitâ lunari ut circulari, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 47″. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia elementa assumpserit, sive ex excentricitate orbitæ lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. 1. Prob. V. pag. 72, prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; et quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas ferè evanescit respectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab aphelio ad perihelium, illic enim tardatio vera minor est quàm tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quâm secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam*, &c. Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit vires Solis esse ut cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum apogæi et nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciprocè; hinc dicatur a mediocris distantia Terræ a Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus apogæi in distantiâ a sit g, motus medius nodi in eâ distantiâ a sit n, in distantiâ x, motus apogæi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ g et motus nodi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ n aut formando seriem ex his quotientibus et omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus apogæi in quavis distantiâ, $g \mp \frac{3x}{a} g$, et motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$.

(n) * *Et inde oriuntur æquationes annuæ, æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus apogæi Lunæ et nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias a Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a}$ g, et $\frac{3x}{a}$ n, si quæratur progressus apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a}$ g, $\frac{3x}{a}$ n processerunt aut recesserunt, summa ergo omnium harum quantitatum erit sumenda, quæ erunt correctiones seu æquationes quibus ex loco medio apogæi et nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis sit in duplicatâ ratione distantiæ inversè (ut exponetur in notâ (o) proximè sequenti) sit m motus medius diurnus Solis in mediocri distantiâ a, in distantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{\overline{a \pm x}^2}$ m, seu in seriem resolvendo hanc expressionem erit $m \mp \frac{2x}{a}$ m, hinc differentia inter motum medium et verum erit $\pm \frac{2x}{a}$ m, et ex summâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis; cùm ergo æquationes apogæi et Lunæ ex summâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a}$ g, $\frac{3x}{a}$ n constent, erunt istæ æquationes ubivis in punctis correspondentibus seu in æqualibus ab aphelio Terræ distantiis in ratione constanti 3 g, et 3 n ad 2 m: ideóque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) Motus autem Solis est in duplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè (p) et maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est $1^{gr}. 56'. 20''.$ prædictæ Solis eccentricitati $16\frac{1}{12}$ congruens. (q) Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}. 54'. 30''.$ (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad $2^{gr}. 54'. 30''.$ ut motus medius diurnus apogæi, et motus medius diurnus nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19'. 43''.$ et æquatio maxima medii motûs nodorum $9'. 24''.$ (s) Additur verò æquatio prior

(o) * *Motus Solis est in duplicatâ ratione distantiæ inversè* scilicet motus Solis angularis e Terrâ spectatus; nam cùm Sol describat semper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ describit sunt semper inversè ut distantiæ, sed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ spectatorum sunt etiam inversè ut eorum a Terrâ distantia, ergo arcus quos Sol singulis tempusculis æqualibus describere videtur e Terrâ, sunt in duplicatâ ratione distantiarum inversè.

(p) *Et maxima centri æquatio est* $1^{gr}. 56'. 20''.$ Illam $1^{gr}. 55'. 50''.$ facit Ill. Cassinus.

(q) * *Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè;* dicatur M motus Solis in distantiâ mediocri, quæ dicatur a, et distantia quævis alia sit $a \pm x$; si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiarum inversè, in distantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} M$ sive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando seriem, is motus in distantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omissis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideóque differentia motus in distantiâ verâ et motus in distantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: in verâ autem hypothesi quòd Solis motus crescat in ratione subduplicatâ inversâ distantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ et divisione factâ erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, et differentia motûs veri et motûs medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore hypothesi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correspondentibus; sed æquationes conflantur ex summâ differentiarum motûs veri et medii sumptarum in omnibus locis ab aphelio usque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypothesi singulæ differentiæ motûs veri et medii sint in omnibus punctis correspondentibus in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cùm ergo æquatio maxima sit per observationes $1^{gr}. 56'. 20''.$ hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}. 56'. 20''.$ sive $2^{gr}. 54'. 30''.$ Q. e. d.

(r) * *Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi et nodorum Lunæ generant, sunt ad* $2^{gr}. 54'. 30''.$ *ut motus medius apogæi et nodi ad motum medium Solis.* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius apogæi in mediocri nempe distantiâ, n motus medius nodorum, et m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum et motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab apogæo Solis usque ad mediocrem ejus a Terrâ distantiam, itaque illæ æquationes constituuntur per series omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, et omnium $\frac{3x}{a} m$, qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem sint in tribus hisce seriebus summæ earum serierum sive æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n et m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii apogæi, nodi et Solis, ergo datâ unâ ex his æquationibus, v. gr. datâ æquatione maximâ Solis et motu medio apogæi, nodi et Solis, habentur cæteræ æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipsâ hac demonstratione, verum quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius æquationem, sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(s) * *Additur verò æquatio* apogæi Lunæ *et subducitur æquatio* nodi *ubi Terra pergit a peri-*

et subducitur posterior, ubi Terra pergit a perihelio suo ad aphelium: et contrarium fit in oppositâ orbis parte.

([t]) Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos est angulos cum lineâ Terram et Solem jungente: et propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quàm in posteriore. ([u]) Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens a situ apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cùm apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; et nulla cùm illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: et motui medio additur in transitu apogæi Lunæ a Solis quadraturâ ad syzygiam, et subducitur in transitu apogæi a syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″. circiter, ([x]) quantùm ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis

helio suo ad aphelium; motus apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem a perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo æquatio addenda, posterior detrahenda.

([t]) * *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem,* &c. Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 66.) quod (existente x distantiâ Lunæ a Terrâ, r ejus distantiâ mediocri, et y sinu ejus distantiæ a quadraturâ, existente etiam F vis Solis in Terram in mediocri ejus distantiâ a) actio Solis Lunam trahentis secundum directionem radii orbitæ lunaris est $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times (\frac{3yy}{r} - r)$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis existente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times - r$, est ergo negativa et Lunam ad Terram attrahit; cùm verò Luna est in syzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, est itaque positiva et Lunam a Terrâ distrahit; in locis autem similibus hæ Solis actiones sunt ut distantiæ x Lunæ a Terrâ. Hinc si apsides sint in syzygiis, sit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad Terram trahitur, ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris; cùm verò Luna est in syzygiis ubi per actionem Solis a Terrâ distrahitur, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ sunt simul æquales axi majori, qui semper superat latus rectum.

Si verò apsides sunt in quadraturis, et Luna etiam in quadraturis, ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ, simul sumptæ, sunt æquales axi majori, et cùm Luna est in syzygiis, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione et oppositione positæ, sunt simul æquales lateri recto orbitæ lunaris.

Ergo cùm apsides sunt in syzygiis, actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit, est minor, et e contra actio quæ Lunam a Terrâ distrahit est major quàm cùm apsides sunt in quadraturis, ideòque orbis lunaris paulo major fieri debet in priore casu quàm in posteriore.

De punctis autem inter quadraturas et syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit, judicari potest, sed potissimum ex calculo quo æquatio ex hâc causâ nata determinatur.

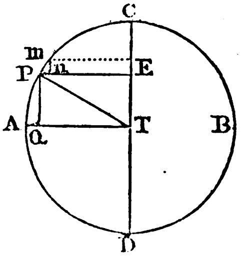
([u]) * *Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris,* &c. Hujus æquationis calculum ejusque leges explicatas habes Probl. VI. calculi secundi (pag. 82.) ejusque Corollariis.

([x]) * *Quantùm ex phænomenis colligere potui,* &c. Ex Coroll. 5. Probl. VI. (pag. 83.) æquatio hæc 3′. 56″. est reperta, quædam autem causæ sunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, sed hæc æquatio ex phænomenis sit colligenda; primò, quantitas f sive excentricitas orbitæ lunaris satis certo non est cognita, ut constat ex iis quæ de excentricitate dicta sunt, hic autem mediocrem excentricitatem assumpsimus 5505 partium quarum radius orbitæ sit 100000 cum Newtono quam Cassinus facit tantùm 5430 partium, et forte minor assumi deberet si attendatur ad excentricitatem orbitæ lunaris, qualis ea foret citra Solis actionem, ex quibus considerationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quàm 3′. 56″., sicque magis accessuram ad æquationem 3′. 45″. quæ ex phænomenis colligitur: secundò cùm varias hypotheses assumpserimus, vero quidem proximas, non tamen veras absolutè, ut liquet ex Cor. 1. Probl. I. (pag. 80.) ex iis erroribus ipsæ quandistantiâ a Terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ Solis inversè; ideóque in maximâ Solis distantiâ est 3′. 34″. et in minima 3′. 56″. quamproximè: ubi verò apogæum Lunæ situm est extra octantes, evadit minor; (z) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per nodos Lunæ ducta transit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente.

titates absolutæ mutantur, sed manent earum proportiones ex quibus leges æquationum pendent, ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per phænomena, reliquæ satis tuto exinde deduci queant.

(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ Solis inversè.* Probl. VI. (pag. 82.) hæc æquatio inventa est $\frac{15\ A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.V.a r^8} \times -$ 163.595. P Q T, in quâ expressione a repræsentat mediocrem Solis a Terrâ distantiam,



in aliâ itaque a Sole distantiâ loco a ponatur X, et loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F est inversè ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ æquatio fit $\frac{15\ A a^2 F q^9 f^2}{109.73.\ S.\ V X^2.\ X r^8}$ $\times -$ 163.595 P Q T tum loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 70.) æquatio evadit $\frac{15\ M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73\ S.\ A.\ X^3 r^9}$ $\times -$ 163.595 P Q T, et quia in octantibus est P Q T $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio est $-$ $\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 + S.\ A X^3 r^7}$, in quâ cùm nulla sit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet æquationem cùm apogæum est in octantibus, hoc est æquationem maximam esse ut X^3 inversè, hoc est *augeri ac diminui in triplicatâ ratione distantiæ Solis X inversè; ideóque*, &c.

Scilicet positâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{1}{12}$, distantia maxima est $1 + .016\frac{1}{12}$, distantia mediocris 1, et distantia minima $1 - .016\frac{1}{12}$, itaque sumendo rationem triplicatam mediocris et maximæ distantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{1}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$, &c. (1.0516) ad 1, ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 34″. et sumendo rationem triplicatam inversam mediocris et minimæ distantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{1}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{2}$, &c. (.950197) ad 1 ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 56″.

(z) * *Estque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque distantiâ Terræ a Sole, hæc æquatio est $\frac{15\ M^2 a^3 r^9 f^2}{109.73\ S.\ A.\ X^3 x^9} \times -$ 163.595 P Q T, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut P Q T; in octantibus autem P Q T est $\frac{1}{4} r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in octantibus obtineretur, manente eâdem distantiâ Solis a Terrâ ut P Q T ad $\frac{1}{4} r^2$, sive quia P Q T est $\frac{1}{2}$ z y ut $\frac{1}{2}$ z y ad $\frac{1}{4} r^2$, et utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2\ z\ y}{r}$ ad r, sed $\frac{2\ z\ y}{r}$ est sinus duplæ distantiæ puncti P, hoc est apogæi a syzygiâ, aut a quadraturâ (perinde enim est ut ex trigonometriæ principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ apogæi extra octantes est ad æquationem maximam quæ obtineretur in octantibus manente eâdem distantiâ Telluris a Sole, ut sinus duplæ distantiæ apogæi Lunæ a proximâ syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eandem*, &c. Cùm linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel a Terrâ distrahendam, vel ad Terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo plano; cùm autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ Solem ac Terram jungente, tunc Sol maxime discedit a plano orbitæ lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo plano orbitæ lunaris ad eclipticam, et per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulò major est quàm in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ lunaris dimovendo consumitur, ad calculum vocamus Probl. I. calculi tertii (pag. 84).

([b]) Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in Solis octantibus versantur, et evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi alterutrius a proximâ syzygiâ aut quadraturâ : ([c]) additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia; et in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47″. in mediocri Solis distantiâ a Terrâ, ([d]) uti ex theoriâ gravitatis colligo.

([b]) * *Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio.* Hujus æquationis quantitatem et leges Probl. III. calculi tertii (pag. 85.) exposuimus, illamque $\frac{3 \text{ A. F. } l^2}{8 \text{ S. V. a r}} \times \frac{2 \text{ n m}}{\text{r}}$ invenimus, sumendo l pro sinu inclinationis orbitæ, et n et m pro sinu et cosinu distantiæ nodorum a syzygiâ. Hinc cùm $\frac{2 \text{ n m}}{\text{r}}$ sit sinus duplæ distantiæ nodi a syzygiâ, cæteri verò termini sint constantes, hæc æquatio est maxima *ubi nodi in Solis octantibus versantur*, et evanescit *ubi sunt in syzygiis vel quadraturis et in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi a syzygiâ*, &c.

([c]) * *Additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ, lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc est acceleratio quædam oritur respectu motûs, qui, omissâ hac consideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, et quæ includitur in medio motu Solis est ubique $\frac{3 \text{ A. F. } l^2}{2 \text{ S. V a r}^2} \times \frac{\text{r u}}{2}$, vera autem acceleratio est $\frac{3 \text{ A. F. } l^2}{2 \text{ S. V a r}^2} \times$ ANQ. Unde æquatio est $\frac{3 \text{ A. F. } l^2}{2. \text{ S V a r}^2} \times (\frac{\text{r u}}{2} - \text{A N Q})$ per Probl. III. calculi tertii (pag. 85, et seq.) jam itaque si $\frac{\text{r u}}{2}$ sit major quàm A N Q quod evenit in toto quadrante A N C, acceleratio mediocris est major verâ, et Luna magis processisse censetur quàm revera processit, hinc ista differentia $\frac{3 \text{ A. F. } l^2}{2 \text{ S.V. a r}^2} \times (\frac{\text{r u}}{2} - \text{A N Q})$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem casu Sol qui puncto A respondere censetur, est in consequentia respectu nodi N.

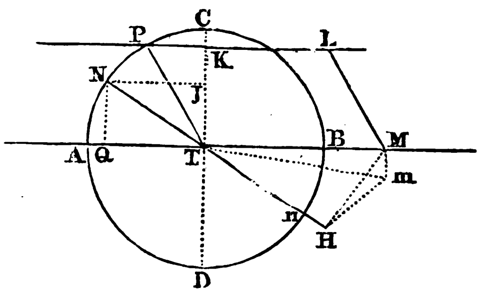
Dum verò N versatur inter C et B, et n inter A et D, tunc $\frac{\text{r u}}{2}$ est minor quàm A N Q, sic itaque acceleratio mediocris est minor quàm acceleratio vera, ideóque differentia $\frac{3 \text{ A. F } l^2}{2 \text{ S.V. a r}^2} \times (\frac{\text{r u}}{2} - \text{A N Q})$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A est in antecedentia respectu nodi proximi n.

3. Dum N versatur inter B et D et n in A et C $\frac{\text{r u}}{2}$ excedit A N Q; sive motus mediocris excedit verum; subduci itaque debet differentia, est verò in eo casu Sol in A in consequentia respectu nodi n.

Denique dum N est inter D et A, $\frac{\text{r u}}{2}$ minor est quàm A N Q, addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ, et Sol est in antecedentia respectu nodi N.

Ergo æquatio subducitur ex medio motu Lunæ cùm Sol est in consequentia respectu nodi proximi, additur verò ei motui cùm Sol est in antecedentia.

([d]) * *Uti ex theoriâ colligo.* Calculus noster Coroll. Probl. III. contentus, æquationem maximam 45″.6 exhibet, qui numerus est adeo proximus numero 47″. quem ex theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile sit ipsum hunc numerum ex theoriâ gravitatis collegisse eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 83.) adhibetur, differentiola enim ista oriri potest ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem M mensis periodici citra actionem Solis considerati, paulo majorem fecerit quàm nos.



(e) In aliis Solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciprocè ut cubus distantiæ Solis a Terrâ, ideóque in perigæo Solis ad 49″. in apogæo ejus ad 45″. circiter ascendit.

(f) Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, et regreditur ubi cùm Sole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore casu et minima in posteriore, per Corol. 7, 8, et 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, et æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. (h) Et æquatio maxima semestris est 12^{gr}. 18′. circiter, quantùm ex observationibus colligere potui. Horroxius noster Lunam in ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. Halleius centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. (i) Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu et regressu apogæi et quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terrâ in

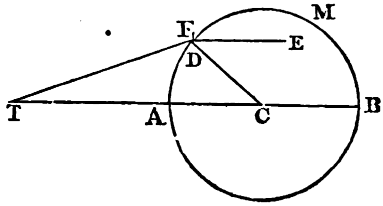
(e) * *In aliis Solis distantiis.* Eadem plane est demonstratio ac in notâ (y) præcedente; cùm æquatio fit $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S\,V\,a\,r} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ in diversâ Solis a Terrâ distantiâ X, loco a scribatur X, loco F, $\frac{a^2\,F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{a\,M^2}{r\,A^2}$, æquatio evadit $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.\,S.\,X^3 r^2} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ et in octantibus quia $\frac{2\,n\,m}{r} = r$, æquatio est $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.\,S\,X^3\,r}$, ideóque æquationes in octantibus in diversâ Solis a Terrâ distantiâ, sunt inter se inversè ut X^3, si fiat itaque ut cubus maximæ distantiæ Terræ a Sole qui est 1.0516, ad cubum 1 mediocris distantiæ, ita 47″. æquatio pro mediocri distantiâ inventa erit ad 45″. circiter, eaque erit æquatio in maximâ distantiâ Solis a Terrâ, et ut .950107 cubus minimæ distantiæ ad 1, ita 47″. ad 49″. circiter, quæ erit æquatio maxima cùm Sol erit in perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) ostendetur quomodo in quâvis Solis a Terrâ distantiâ, et in quâvis positione nodi respectu Solis æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eandem gravitatis theoriam apogæum Lunæ progreditur quam maximè,* &c. Per methodum ex ipsis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 86. et seq.) motum apsidis esse ut $3\,y\,y - r\,r$, sumendo y pro sinu distantiæ apsidis a quadraturâ; is ergo motus, juxta hunc calculum, evanescit cum $y\,\sqrt{3} = r$, cùm nempe y est sinus arcûs 35^{gr}. 15′, positivus verò est in syzygiis; illic enim fit $3\,y\,y - r\,r = 2\,r\,r$ negativus in quadraturis; illic enim est $3\,y\,y - r\,r = -\,r\,r$.

(g) * *Et eccentricitas fit maxima in priori casu,* cùm nempe apsides sunt in syzygiis, et minima in posteriore, cùm nempe *apsides sunt in quadraturis.* Id utique statuitur toto calculo de excentricitate orbitæ lunaris superius pag. 91. et seq. tradito.

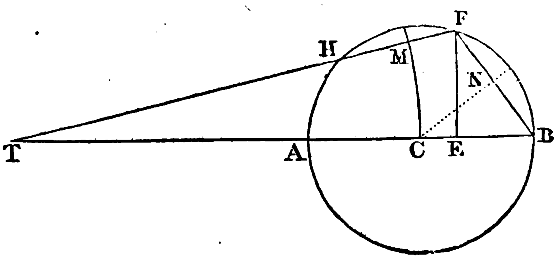
(h) * *Et æquatio maxima semestris,* &c. Hanc ex observationibus determinandam liquet cùm non satis feliciter obtineatur absoluta quantitas motûs apogæi per calculos secundum Newtoniana Principia institutos; methodus autem a nobis indicata est admodum incompleta et rudis, et in eâ multa, quæ considerari debuissent, sunt omissa: hinc cùm in cæteris motibus Lunæ et æquationibus ad votum succedat theoria Newtoniana, in hoc casu aliquid adhuc desiderari, fatendum est.

(i) * *Et ex motu in epicyclo.* Ingeniosè et feliciter conjunctas esse unicâ constructione geometricâ excentricitatis variationes, et motûs apogæi æquationes, ex iis quæ de excentricitate dicta sunt pag. 94. intelligi potest; illic enim ostenditur quod si T C sit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus distantiæ apsidis a syzygiâ, tunc linea T F est excentricitas, ostenditur verò, Probl. II. pag. 95. variationem maximam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quàm consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum radius orbitæ lunaris est 100000 et excentricitas T C 5505, simul autem cùm constet ex observationibus æquationem semestrem apogæi 12^{gr}. 18′. esse, ejus anguli sinus est partium 1172 radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut radius 100000 ad sinum anguli 12^{gr}. 18′. qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est $1172\frac{3}{4}$; hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos et observationes et calculus indicant, simulque est partes 100000, et referat T Terram et T C eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur T C ad B, ut sit C B sinus æquationis maximæ semestris $12^{gr}. 18'$. ad radium T C, et circulus B D A centro C, intervallo C B descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur et secundum ordinem literarum B D A revolvitur. Capiatur angulus B C D æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab apogæo Lunæ semel æquato, et erit C T D æquatio semestris apogæi Lunæ et T D eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio et apogæo et eccentricitate, ut et orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in orbe et distantia ejus a Terrâ, (k) idque per methodos notissimas.



(l) In perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velociùs movetur circum centrum C quàm in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole inversè. (m) Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis Lunæ velociùs movetur in epicyclo B D A in duplicatâ ratione distantiæ Terræ

sinus anguli maximi quo discedunt apsides a loco medio: ergo quando B F est quadrans, ideóque apsides octante a syzygiâ distant, sinus anguli F T B est ipsa linea C B sive $1172\frac{2}{3}$ dum radius T F est æqualis T C sive 5505, ergo eo in casu angulus F T B est verus discessus lineæ apsidum a suo loco medio, et jacet T F in verâ positione lineæ apsidum, et cùm T F sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ lunaris; idem proximè eveniet in quovis alio loco F; nam cùm æquationes apogæi (pag. 91.) sint ut sinus arcus dupli distantiæ apsidis a Sole, et sit F B arcus duplus distantiæ apsidis a Sole et F E ejus sinus, æquatio maxima $12^{gr}. 18'$. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, sed in eâ proximè sunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque est quam proximè T F in verâ positione lineæ apsidum et F centrum orbitæ.



(k) * *Per methodos notissimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla esset vis Solis, quiescerent apsides orbitæ lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ lunaris F in circulo B F H A vi solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ Terræ a Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ lunaris in circulo B F H A eâ proportione variari debet.

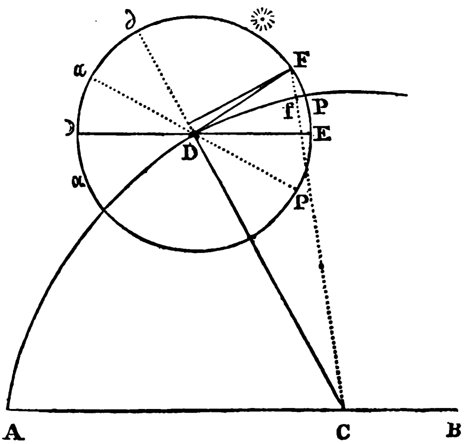
(m) * *Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam,* &c. Arcus F B vel arcus B D in figurâ textûs est duplus distantiæ apsidis a syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ apsidis a Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis a loco apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus B F, et id residuum est argua Sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè, ab orbis centro D agatur recta D E versus apogæum Lunæ seu rectæ T C parallela, et capiatur angulus E D F æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi Lunæ a perigæo Solis in consequentia; (n) vel quod perinde est, capiatur angulus C D F æqualis complemento anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et sit D F ad D C ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ, et motus medius diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 et 52′. 27″. 16‴. ad 59′. 8″. 10‴. conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, et in epicyclo, cujus centrum est D, et radium D F, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli D A B D. (o) Hâc enim ratione

mentum annuum, fingatur apsidem immotam esse, Solem verò moveri, pendebit arcus B F ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inversè in ratione duplicatâ distantiarum Terræ a Sole (notâ ϱ) ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ a Sole.

(n) * *Vel quod perinde est.* Si circa punctum D radio D F describatur circulus E F ⊙ d α ☽ P; in quo fit E Lunæ apogæum e centro D spectatum; ☽ Lunæ perigæum, α apogæum Solis, P Solis perigæum, ⊙ locus Solis, cùm ex constructione sit d D E = D C B, ideóque duplum argumenti annui, sive duplum distantiæ ⊙ E, erit E D C æqualis semi-circulo dempto 2 ⊙ E, sive erit $\frac{1}{2}$ c — 2 ⊙ E; itaque si ei arcui E D C addatur E D F æqualis annuo argumento demptâ distantiâ apogæi Lunæ a perigæo Solis, sive ⊙ E — P E, fiet C D F = $\frac{1}{2}$ c — ⊙ E — P E, sed cùm $\frac{1}{2}$ c sit æqualis distantiæ perigæi Solis ab ejus apogæo, erit $\frac{1}{2}$ c = P E ⊙ α, ex quo itaque detracto P E et E ⊙, est C D F = ⊙ α sive distantiæ Solis ab apogæo in antecedentia, aut quod idem est complemento ad 360gr. arcus α ☽ P E F ⊙, qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo, in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

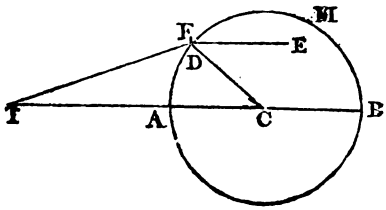
Si punctum P foret in consequentia respectu puncti E, tunc E D F faciendus esset æqualis argumento annuo additâ distantiâ perigæi Solis a Lunâ, sicque fieret C D F = $\frac{1}{2}$ c — ⊙ + P E et quoniam in eo casu est $\frac{1}{2}$ c = P ⊙ ☽ α, et — ⊙ E + P E = — P ⊙, erit C D F = ⊙ ☽ α, sive erit distantia Solis ab apogæo in antecedentia posito, hoc est, complementum ad 360gr. arcûs α ☽ P E F ⊙, qui arcus est distantia Solis ab apogæo suo in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motûs centri orbis lunaris quæ adhibenda est ut



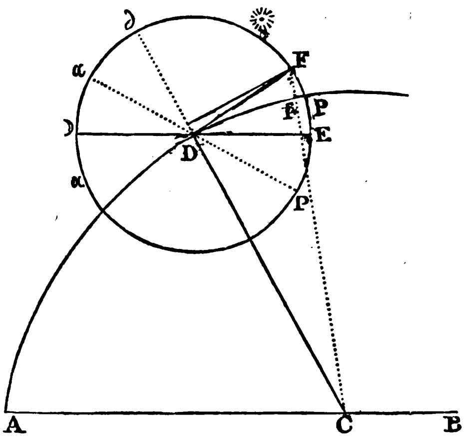
moveatur velocius quàm per primam constructionem, idque in simplici ratione distantiæ inversè esse proportionalem æquationi centri Solis, constat eadem demonstratione quâ in notis (m) et (n) pag. 96. de æquationibus annuis apogæi et nodi idem probatum fuit.

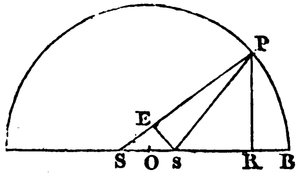
Dicatur a mediocris distantia Terræ a Sole, quævis alia distantia dicatur a $\pm$ x, motus medius centri orbis lunaris in distantia a fit o, et quia ille motus est in triplicatâ ratione distantiæ Solis a Terrâ inversè, in aliâ quavis distantiâ Terræ a Sole erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3}$ o et formando seriem, erit o $\mp \frac{3x}{a}$ o, sed si fingeretur eum motum sequi proportionem inversam duplicatam distanvelocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ Solis a Terrâ quamproximè, ut oportet.



Computatio motûs hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terrâ sit partium 100000, et eccentricitas T C sit partium 5505 ut supra: recta C B vel C D invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ et recta D F partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam T C subtendit angulum ad Terram quem translatio centri orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: et eadem

tiarum, inveniretur is motus singulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, et ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. (m) præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. (n) pag. 96, 97.) differentiam inter motum medium et verum esse $\mp \frac{2x}{a} m$; ideóque cùm ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, sit in singulis punctis x eadem, æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc est erit proportionalis æquationi centri Solis; sed æquatio centri Solis est quamproximè proportionalis sinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S et s orbitæ Solis ducantur lineæ ad punctum P, erit B s P ano-





malia media, et B S P anomalia vera, ideóque angulus S P s erit æquatio, ducatur ergo ex s in S P perpendiculum s E et ex P perpendiculum P R, ob similitudinem triangulorum S s E et s P R erit, S P ad P R ut S s ad s E, sive sumendo S P pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut radius ad sinum anomaliæ veræ, ita dupla excentricitas ad sinum æquationis Solis, sive ad ipsam æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinubus sumi possunt. Hinc sinus anomaliæ veræ est ad æquationem centri Solis in ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem; hinc itaque, æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut sinus anomaliæ Solis, sed angulus C D F est complementum ejus anomaliæ ad 360gr. sinus autem arcûs alicujus et sinus ejus complementi ad 360gr. sunt unum et idem, ergo æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ nata est proportionalis sinui angulorum C D F, et si sumatur radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes sinus angulorum C D F erunt ipsæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, si itaque sumantur a puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis sinubus, erit f verus locus centri orbitæ lunaris, et quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii C D, recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici orbis Lunæ a Terrâ, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, et ad distantiam Lunæ a Terrâ (p) subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ distantiâ a Terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa D F cum rectâ a puncto F ad Lunam ducta continet quamproximè, et ubi maxima est, evadit 2′. 25″. (q) Angulus autem quem recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum E D F ab anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam apogæi Lunæ ab apogæo Solis. Et ut radius est ad sinum

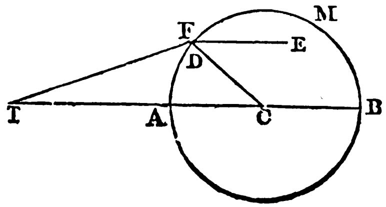
linea per C et f ducta cadit etiam in F, sumi potest F ut verus locus centri orbitæ lunaris.

Invenitur autem æquatio maxima orta ex errore $\mp \frac{x}{a}$ o; si attendatur quod Solis motus est ubique m $\mp \frac{2x}{a}$ m, sive m $\mp \frac{x}{a} \times$ 2 m ideóque summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}$ o fore ad summam omnium errorum in Solis motu genitorum ut o ad 2 m, sive æquationem quæsitam esse ad æquationem Solis ut est motus centri orbitæ lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis respectu sui apogæi, sed quoniam arcus B D sunt semper dupli distantiæ Solis ab apogæo Lunæ, motus diurnus centri orbis lunaris per circulum B D A est etiam duplus motûs Solis ab apogæo Lunæ, hinc æquatio quæsita est ad maximam æquationem Solis ut est radius D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ et ut duplus motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, maxima autem Solis æquatio est ipsa dupla excentricitas orbis magni, hinc æquatio quæsita sive radius D F est ad duplam excentricitatem ut D C ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ, et ut motus diurnus Solis ab apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab apogæo suo conjunctim, undè vicissim est etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab apogæo Lunæ, ad distantiam mediocrem Solis a Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab apogæo suo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipsaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F translatum ex proprio loco mota censeri debet in locum alium per lineam ipsius D F duplam ipsique parallelam; cùm itaque distantia mediocris sit partium 100.000, si hæc linea quæ duplicata est 70 .4, angulum rectum cum linea a Terrâ ducta efficiat, quo casu maximam æquationem facit, ipsa subtendet angulum 2′. 25″. siquidem sinus duorum minutorum est 58 .18 sinus trium 87 .27. In aliis autem hujus lineæ positionibus respectu lineæ a Terrâ ductæ, anguli quos subtendet erunt ad istum ut est sinus anguli quem facit cum lineis a Terrâ ductis ad radium; nam in triangulis in quibus duæ lineæ sunt constantes, sed earum angulus variabilis, si una ex iis lineis alterius respectu sit minima, tertia linea pro constante assumi potest, est verò ad minimam lineam, ut sinus anguli variabilis ad sinum anguli oppositi minimæ lineæ; hinc sinus anguli variabilis et sinus anguli minimi sunt in ratione datâ. Ergo ut sinus anguli recti sive radius ad 2′. 25″. ita sinus anguli quem facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

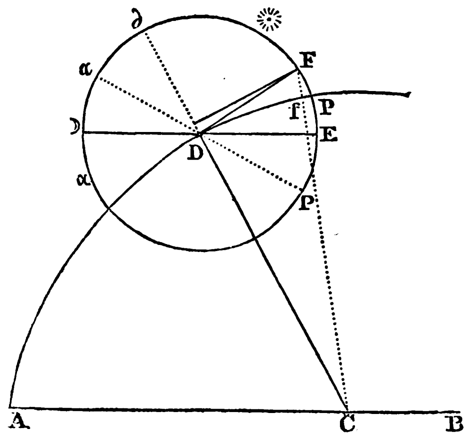
(q) * *Angulus autem quem* facit linea a Terrâ ducta cum lineola parallela ad D F, et in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta D F et recta a puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ lunaris a quo Terra non multum distat; fingatur, produci lineam D F et ex puncto F duci lineam parallelam lineæ D E, quæ ad apogæum Lunæ tendit, et ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum lineâ D E erit anomalia media Lunæ; ergo angulus hujus lineæ cum lineâ D F producta erit differentia anguli E D F et anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat E D F differentia argumenti annui, et distantiæ apogæi Lunæ a perigæo Solis si ex anomalia media Lunæ tollatur, argumentum annuum superest distantiæ Lunæ a Sole, cui addi debet distantia apogæi Lunæ et perigæi Solis, sive (quia semi-circuli additi vel detracti non mutant valores angulorum eorumque sinuum) distantia apogæi Lunæ et apogæi Solis; cætera facilè patebunt ex figuræ descriptione; exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis et Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ D F transfertur in antecedentia; dum e contrà, punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia;

anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semi-circulo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.



Cùm atmosphæra Terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, et refringendo spargat eandem in umbram Terræ, et spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, et ultimò in octantibus per phænomena examinari et stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis et Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio Grenovicensi, die ultimo mensis Decembris anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20^{gr}. 43′. 40″. et apogæi ejus ♋ 7^{gr}. 44′. 30″., et motum medium Lunæ ♒ 15^{gr}. 21′. 00″., et apogæi ejus ♓ 8^{gr}. 20′. 00″., et nodi ascendentis ♌ 27^{gr}. 24′. 20″.; et differentiam meridianorum Observatorii hujus et Observatorii Regii Parisiensis 0^h. 9′. 20″. motus autem medii Lunæ et apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.



est verò F ⊙ = P E, cùm ergo A E est major semi-circulo, ut in figura, tunc P E sive F ⊙ est minor semi-circulo, est ergo ⊙ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea æquatio; sit verò A E minor semi-circulo erit P E major semi-circulo ut et F ⊙, ideóque est ⊙ in antecedentia respectu F; promovetur itaque Luna propter hanc æquationem; cæterum non tantum in luminarium syzygiis, sed ad cæteros Lunæ adspectus hæc adaptari possunt, verùm commodius est astronomis, theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare et constituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi diametrum Terræ ex Lunâ spectatæ; jam verò propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-diameter Terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc carent radiis solaribus loca quæ trans atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo atmosphæra vice corporis opaci, et umbra eâ de causâ dilatari debet quasi semi-diameter Terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

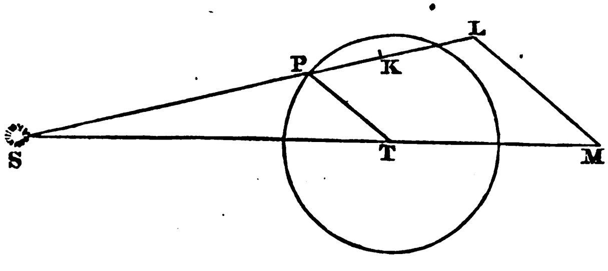
PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis M L seu P T, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092.6. Et vis T M — L M seu 2 P K in syzygiis lunaribus



est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, (x) in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideóque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole. Vi alterâ, quæ duplo major est, mare elevatur et sub Sole et in

(x) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in Prop. XXV. demonstratum est eam partem vis centripetæ lunaris in Solem quâ motus ejus circà Terram perturbatur et quæ radio orbitæ lunaris erat proportionalis, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum Terræ circà Solem et Lunæ circà Terram, simili planè modo probatur eam quoque partem vis centripetæ in Solem, quæ analoga est radio Terræ, esse ad vim centripetam Lunæ in Terram in ratione radii Terræ ad radium orbitæ lunaris directè et ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà Terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè superficiem Terræ sunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius Terræ ad radium orbitæ lunaris, hoc est, ut 1 ad $60\frac{1}{2}$.

regione Soli oppositâ. (z) Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant a Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole et Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad mare agitandum; et eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub Sole et Soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole, nil ageret.

Hæc est vis Solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quàm in mediocri suâ distantiâ a Terrâ. (a) In aliis Solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directè et cubus distantiæ Solis a Terrâ inversè.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ a diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum Parisiensium 85472, ut supra in Prop. XIX.; vis solaris de quâ egimus, cùm sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideò ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole et Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a Sole, mensurâ tantùm pedis unius Parisiensis et digitorum undecim cum tricesimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

(z) * *Summa virium* est ad vim gravitatis ut 3 ad 33604600 sive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis positionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol versatur in horizonte, et maximè elevatur ubi Sol in vertice loci versatur. Depressio autem et elevatio aquarum magis ac magis decrescit quo altiùs Sol ascendit suprà horizontem, aut a vertice descendit. Prætereà hæc depressio aut elevatio circa initium et finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; sed hæc contingent successiva aquarum incrementa et decrementa si vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc est, per sinum versum 180°. seù duplæ altitudinis Solis, suprà horizontem; in aliis autem Solis positionibus vis eadem exhibeatur per sinus versos altitudinum duplicatarum; quare in variis Solis positionibus, vis ad mare attollendum sumi potest ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem, seclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis a Tellure distantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad Terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ distantiarum inversâ (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) considerari itaque poterit vis Solis ad mare attollendum ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem loci directè et cubus distantiæ Solis a Terrâ inversè. Cæterùm tota hæc Propositio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Dissertationibus quæ Vol. III. adjectæ sunt.

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum observationibus et nuperrimè institutis gradûs meridiani mensuris sub circulo polari, Terra altior est sub æquatore quàm ex theoriâ Newtonianâ prodiit (Prop. XIX. Lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc Corollario definita. Observandum autem est Corollarium illud rigorosè verum non esse; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris et axis Terræ per simplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen casus est longè diversus, primus siquidem pendet a quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex Cor. 2. Prop. XC. Lib. I. et not. 106. Lib. hujus). Sed quam parùm a veritate discrepet præsens Corollarium, apparet ex computo inito in Dissertatione clariss. Maclaurin, Prop. V.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.

([c]) Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, et hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii Avonæ ad lapidem tertium infra Bristolium, tempore verno et autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione et oppositione luminarium, observante Samuele Sturmio, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summâ virium, posterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur et Lunæ in æquatore versantium et mediocriter a Terrâ distantium sunto vires S et L, et erit L + S ad L — S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu Plymuthi æstus maris ex observatione Samuelis Colepressi ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno et autumnali altitudo æstûs in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L + S ad L — S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstûs in portu Bristoliæ, observationibus Sturmii magis fidendum esse videtur, ideóque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii a syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium Lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut a Sturmio notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, sed post horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideóque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideóque proximè sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas et hyems maximè vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi Sol distat a solstitiis decimâ circiter parte totius circuitûs, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad

([c]) * *Vis Lunæ ad mare movendum.* Vid. Cap. VI. num. 10. in Dissertatione clariss. Bernoullii et Prop. IX. in Dissertatione clariss. Maclaurini.

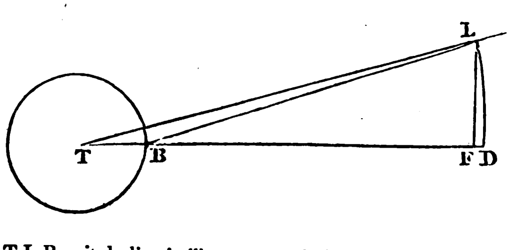
meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. (d) Et vis Solis in hâc distantiâ Lunæ a syzygiis et quadraturis, minor erit ad augendum et ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quàm in ipsis syzygiis et quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli gradum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideóque in analogia superiore pro S scribi debet 0.7986355 S.

Sed et vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 23. 13′. versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantùm 0.8570327 L. Est igitur L + 0.7986355 S ad 0.8570327 L — 0.7986355 S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo Luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideóque distantia Lunæ a Terrâ in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a syzygiis, ubi æstus maximus generatur, et in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69.098747 et 69.897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem Lunæ ad mare movendum sunt in triplicatâ ratione distantiarum inversè, ideóque vires in maximâ et minimâ harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantiâ ut 0.9830427 et 1.017522 ad 1. (h) Unde fit

(d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm a vero differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

(e) 122. * *In duplicatâ ratione.* Sit T B D planum æquatoris, T centrum Telluris, sitque Luna in L, erit angulus L B D, mensura declinationis ab æquatore, seu ob exiguum angulum



T L B, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo L T D, cujus anguli cosinus est T F, sumpto T L, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit a centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè a centro trahit, ubi Luna est in L, ut T L ad T F, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis L T D, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam a centro trahens; quarè, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totius T L, ad quadratum sinûs complementi T F, declinationis Lunæ L T D.

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. XXVIII. Lib. hujus).

(g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I.).

(h) * *Unde fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi possit, ducenda sunt media et extrema, hæcque orietur æquatio 1.017522 L × 5 + 0.7986355 S × 5 = 0.9830427 × 9 × 0.857032 L — 0.7986355 S × 9; et transponendo hæc habetur proportio S : L = 0.9830427 × 0.8570327 × 9 —.017522 × 5 : 0.7986355 × 5 + 0.7986355 × 9.

$1.017522\,L + 0.7986355\,S$ ad $0.9830427 \times 0.8570327\,L - 0.7986355\,S$ ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4.4815. Itaque cùm vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cùm aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius et undecim digitorum cum tricesimâ parte digiti, eâdem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum et digitorum $\frac{5}{22}$, et vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum semisse, et ubi Luna est in perigæo, ad altitudinem pedum duodecim cum semisse et ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè sufficit, et quantitati motuum probè respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in Mari Pacifico, et Maris Atlantici et Æthiopici partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem Pacifico, quod profundius est et latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in Atlantico et Æthiopico. Etenim [1] ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari Æthiopico ascensus aquæ intra tropicos minor est quàm in zonis temperatis, propter angustiam maris inter Africam et australem partem Americæ. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque et orientale et occidentale simul descendat: cùm tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Eâ de causâ fluxus et refluxus in insulis, quæ a littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos et evacuandos, influere et effluere cogitur, fluxus et refluxus debent esse solito majores, uti ad Plymuthum et pontem Chepstowæ in Anglia; ad montes S. Michaëlis et urbem Abrincatuorum (vulgo Avranches) in Normannia; ad Cambaiam et Pegu in India Orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo et recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi et remeandi prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 et amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum et vadosorum, uti Magellanici et ejus quo Anglia circundatur. Æstus in hujusmodi portubus et fretis per impetum cursus et recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum et apertum

Jam verò sumptis horumce numerorum logarithmis, et quæsitis respondentibus numeris in vulgaribus logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(1) * *Ut plenus sit æstus.* (109.)

spectant, ubi aqua sine impetu effluendi et remeandi attolli et subsidere potest, magnitudo æstûs respondet viribus Solis et Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis pendulorum, vel in staticis aut hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. (k) In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 4.4815 ad 1, et vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXIV. Lib. I.) sunt ut densitates corporum Lunæ et Solis et cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit ad densitatem Solis ut 4.4815 ad 1 directè, et cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inversè: id est (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ et Solis sint 31′. 16½″. et 32′. 12″.) ut 4891 ad 1000. (l) Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 1000 ad 4000; et propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 4891 ad 4000 seu 11 ad 9. Est igitur corpus Lunæ densius et magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex observationibus astronomicis sit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 39.788.

Corol. 5. (m) Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ erit quasi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Corol. 6. (n) Et distantia centri Lunæ a centro Terræ erit ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788.

(o) *Corol.* 7. Et mediocris distantia centri Lunæ a centro Terræ in octantibus Lunæ erit semi-diametrorum maximarum Terræ 60⅖ quamproximè. Nam Terræ semi-diameter maxima fuit pedum Parisiensium 19658600, et mediocris distantia centrorum Terræ et Lunæ, ex hujusmodi diametris 60⅖ constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc

(k) * *In æstu solo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare sufficiunt, sed alios effectus sensibiles producere non possunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratissimâ librâ comparatum sentiri vix potest, vis autem solaris est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, summaque virium Solis et Lunæ est ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas, licèt conjunctas, multò minores esse quàm ut pondus corporis cujusvis in librâ appensi sensibiliter augere vel minuere possint. Unde nec in experimentis pendulorum, barometrorum, vel in staticis aut hydrostaticis sensibiles edent effectus. Idem Corollarium eleganter demonstravit clariss. Eulerus num. 30. Dissertationis de Fluxu et Refluxu Maris.

(l) * *Densitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. VIII. Lib. hujus.)

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix est ut massa directè et quadratum distantiæ a centro, hoc est, semi-diametri inversè (Cor. 1. Prop. LXXV. Lib. I.) Ideóque gravitas acceleratrix in superficie Lunæ est ad gravitatem acceleratricem in superficie Terræ ut 1 × 13324. ad 39.788 × 1000, hoc est, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et distantia centri Lunæ.* (61. Lib. I.)

(o) * *Corol.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in Prop. IV. Lib. hujus.

distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ et Lunæ, ut 40.788 ad 39.788: ideóque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, respectu fixarum, diebus 27, horis 7, et minutis primis $43\frac{4}{5}$; sinus versus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14.7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14.7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo tempore minuti unius primi describet pedes 14.8538067. Et ad sexagesimam partem distantiæ Lunæ a centro Terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 a centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14.8538067. Ideóque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt Terræ semi-diameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15.11175, seu pedes 15, dig. 1, et lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in Prop. XX, descriptam, descensus erit paulo major in latitudine Lutetiæ Parisiorum existente excessu quasi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in atitudine Lutetiæ cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes Parisienses 15, dig. 1, et lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno Terræ in illa latitudine, gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, et lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine Lutetiæ supra ostensum est ad Prop. IV. et XIX.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum maximarum Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri circiter. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{5}{6}$ semi-diametrorum Terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 et 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum Terræ et Lunæ in syzygiis Lunæ est sexaginta semi-diametrorum mediocrium Terræ cum decimâ parte semi-diametri. Et in quadraturis Lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta et unius semi-diametrorum mediocrium Terræ, demptâ tricesimâ parte semi-diametri.

Corol. 10. In syzygiis Lunæ (p) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″. respectivè.

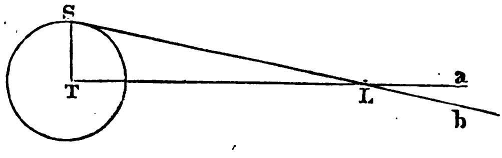
In his computationibus attractionem magneticam Terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est et ignoratur. Si quando verò hæc attractio investigari poterit, et mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, et parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis et Lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus et citimis et ultimis elevandum esset ad vim Lunæ, quâ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem

(p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro et superficie Terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semi-diameter Terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro Terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, sub quo semi-diameter Terræ e loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam Terra est figuræ sphæroidicæ, semi-diametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt, et est semi-diameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90°. ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (Prop. XIX. Lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam et quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (Prop. XX. Lib. huj.) hinc in syzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ et Terræ est semi-diametrorum maximarum Terræ 59.366 circiter (Cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ a Terrâ L S = 59.366, ad semi-diametrum maximam T S = 1, ità sinus totus ad sinum anguli T L S, qui est 57′. 20″. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem ferè ratione ac semi-diametri Terræ, et hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales a Newtono determinantur.

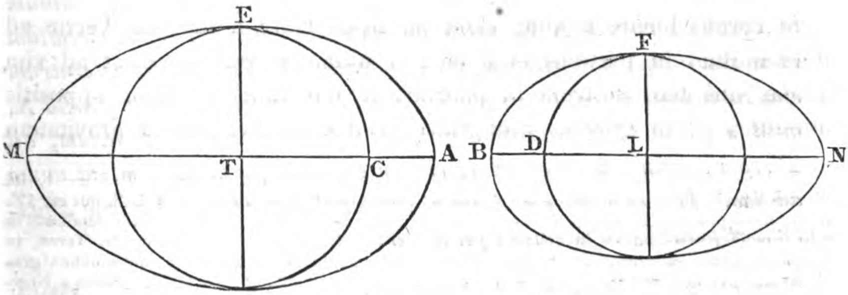


(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de Fluxu et Refluxu Maris plurima hic potuissemus adjungere, quorum ope calculos accuratiùs repetere licuisset. Verùm materiam exhauriunt elegantissimæ Dissertationes quas Vol. III. addidimus.

(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus Terræ fluido satis profundo E A, co-opertus, sitque L, globus Lunæ co-opertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in Terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ et in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphæroidicas similes quarum axes M A, B N, jacerent in directum (106). Cùm enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint

acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39. 788 ad 1 et 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cùm mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura Lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, et superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. Q. e. i.

Corol. (s) Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc



inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, et vicissim B D ad A C sicut L F ad T E, hoc est, si æqualis esset gravitas acceleratrix Terræ in Lunam atque Lunæ in Terram, altitudo fluidi lunaris in partibus proximis et remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum Terræ ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ. Rursùs, si Terra et Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respectivè (Prop. LXXIV. Lib. I.) Quarè si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitatis acceleratrici Lunæ in Terram, nec diameter Lunæ diametro Terræ æqualis, vis Terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis et ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quæ mare nostrum in partibus et sub Lunâ et Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, et diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam Terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis, et ut diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in Dissertationibus de Fluxu et Refluxu Maris.

(s) * *Inde verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum Terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. Positâ autem sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, nisi sphærois Lunæ axem suum Telluri obvertat (109); quare in alio situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris suprà minorem excessu, essent longè tardissimæ, adeò ut non turbetur lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in Prop. XVII.) facies illa quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

124. Clariss. D. de Mairan in elegantissimâ Dissertatione de Motu Diurno Telluris circa Axem, quæ legitur in Monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in Terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis lunaris in longitudinem. Conjecturam facit vir doctissimus, homogeneam non esse Lunæ materiam, sed hemispherium inferius superiori gravius supponit; quo posito facile demonstrat Lunam respectu Telluris in situ constanti manere. Observat deinde fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ

situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) respicere, neque statim abinde retrahi et in Terram converti.

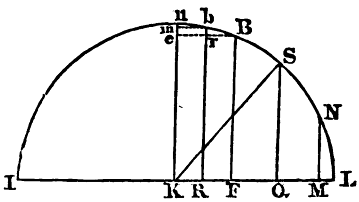
LEMMA I.

Si A P E P p *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *et polis* P, p *et æquatore* A E *delineatam; et si centro* C *radio* C P *describi intelligatur sphæra* P a p e; *sit autem* Q R *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; et Terræ totius exterioris* P a p A P e p E, *quæ sphæra modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* Q R, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* A E, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis et efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod a plano* Q R *maximè distat, consistentium vim et efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendum, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris et plani* Q R *jacentem, peragetur.*

Nam centro K diametro I L describatur semi-circulus I N L. Dividi intelligatur semi-circumferentia I N L in partes innumeras æquales, et a partibus singulis N ad diametrum I L demittantur sinus N M. ([t]) Et

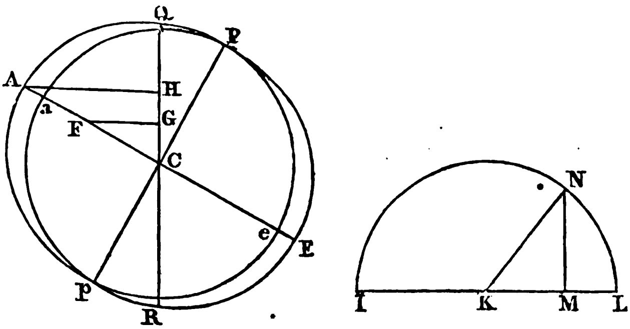
vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variabiles sunt hujusce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur; ex quibus fiet ut modò nobis detegatur aliqua pars hemispherii quod occultum esse solet, modò autem nobis abscondatur aliqua pars hemispherii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab astronomis observatur quàm ex Prop. XVII. Lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram et Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substituatur attractio, quemadmodum a clariss. Daniele Bernoullio factum est, cujus eximiam Dissertationem de Fluxu et Refluxu Maris Cap. III. consulat lector.

([t]) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia I N L, in particulas æquales innumeras n b, N L, N S, b B, &c. erectisque sinibus b R, N M, &c. erit sinus b m, seu K R, æqualis sinui N M, et ità de cæteris (Prop. XXVI. Lib. III. Elem.). Quarè sinus omnes ut K R, K F, æquales erunt sinibus ut N M, S Q, ac proindè summa quadratorum ex sinibus omnibus N M, æqualis erit



summæ quadratorum ex sinibus omnibus K M. Præterea quadratum semi-diametri K N, æquale est quadratis sinuum K M, M N. Quarè (ob summam quadratorum K M, æqualem summæ quadratorum N M,) summa quadratorum ex omnibus semi-diametris K N, dupla est summæ summa quadratorum ex sinibus omnibus N M æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus K M, et summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semi-diametris K N; ideóque summa quadratorum ex omnibus N M erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris K N.

Jam dividatur perimeter circuli A E in particulas totidem æquales, et ab earum unaquaque F ad planum Q R demittatur perpendiculum F G,



ut et a puncto A perpendiculum A H. Et vis, quâ particula F recedit a plano Q R, erit ut perpendiculum illud F G per hypothesin, et hæc vis ducta in distantiam C G [u] erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideóque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut F G × G C ad A H × H C, [x] hoc est, ut F C q ad A C q; et propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium F C q ad summam totidem A C q, hoc est (per [y] jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. e. d.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano Q R, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo Q R quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis et efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo A E unifor-

quadratorum ex omnibus sinibus N M, ideóque summa quadratorum ex omnibus N M, erit duplo minor quàm summa quadratorum ex totidem semi-diametris K N.

[u] * *Erit efficacia.* (47. Lib. I.)

[x] * *Hoc est,* ob triangula A C H, F C G, similia.

[y] * *Per jam demonstrata.* (150.)

miter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim I K circulus quilibet minor æquatori A E parallelus; sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum P a p e sitæ. Et si in planum Q R, (z) quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula L M, l m: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum Q R, (a) proportionales erunt perpendiculis illis L M, l m. Sit autem recta L l plano P a p e parallela et bisecetur eadem in X, et per punctum X agatur N n, quæ parallela sit plano Q R et perpendiculis L M, l m occurrat in N ac n, et in planum Q R demittatur perpendiculum X Y. (b) Et particularum L et l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ et $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ et $ln \times mC - nm \times mC$; seu $LN \times MC + NM \times MC$ (c) et $LN \times mC - NM \times mC$: et harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ (d) seu $2\,LN \times NX$ est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2\,AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ seu $2\,XY \times CY$ ad particularum earumdem in A consistentium vim $2\,AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L et l simul sumptarum vis ad Terram rotandam est ad vim particularum duarum iisdem æqualium et in loco A consistentium ad Terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed si circuli I K circumferentia I K dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\,ACq$; et totidem CXq ad totidem ACq ut $2\,CXq$ ad $2\,ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli I K sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A,

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. I.)

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.)

(b) * *Et particularum L et l.* (Ex dem. in Lem præced.)

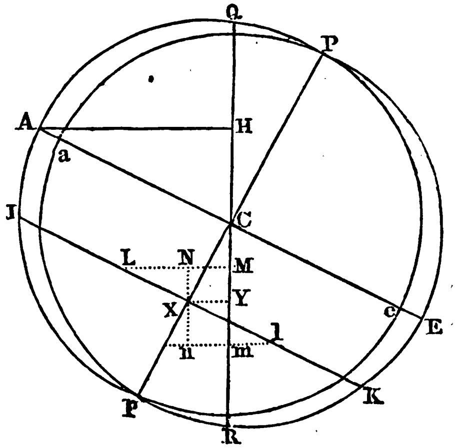
(c) * *Et $LN \times mC - NM \times mC$.* Nam ob similitudinem triangulorum $LN : NM = ln : nm$, sed est $NM = nm$; quare $LN = ln$, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ et ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu $2\,LN \times NX$.* Nam, ob similitudinem triangulorum, est $NX = nX$, ideóque Nn seu $Mm = 2\,NX$, ac proinde $LN \times Mm = 2\,LN \times NX$.

(e) * *Ut LXq ad ACq.* Est enim $LN : AH = LX : AC$ et $NX : HC = LX : AC$, ideóque per compositionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut CXq ad ACq.

ut I X q — 2 C X q ad 2 A C q: et propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli A E, ut I X q — 2 C X q ad A C q.

Jam verò si sphæræ diameter P p dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem I K; (f) materia in perimetro circuli cujusque I K erit ut I X q: ideóque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut I X q in I X q — 2 C X q. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli A E perimetro consisteret, esset ut I X q in A C q. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi A E consistentis, ut omnia I X q in I X q — 2 C X q ad totidem I X q in A C q, (g) hoc est, ut omnia A C q — C X q in A C q — 3 C X q ad totidem A C q — C X q in A C q, id est, ut omnia A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q ad totidem A C q q — A C q × C X q, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est A C q q — A C q × C X q; (h) ac proinde per methodum fluxionum, ut A C q q × C X — $\frac{4}{3}$ A C q × C X cub. + $\frac{3}{5}$ C X q c ad A C q q × C X — $\frac{1}{3}$ A C q × C X cub. id est, si pro C X scribatur tota C p vel A C, ut $\frac{4}{15}$ A C q c ad $\frac{2}{3}$ A C q c, hoc est, ut duo ad quinque. Q. e. d.



(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia, &c.* Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit I X² = C I² — C X²: sed est C I = A C, quare I X² = A C² — C X², ac proinde I X q in (I X q — 2 C X q) = A C q — C X q in A C q — 3 C X q.

(h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates A C q q — 4 A C q × C X q + 3 C X q q et A C q q — A C q × C X q, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ C X, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis A C q q × C X — $\frac{4}{3}$ A C q × C X cub. + $\frac{3}{5}$ C X q cub. fluens autem posterioris quantitatis fiet A C q q × C X — $\frac{1}{3}$ A C q × C X cub. et ut habeatur efficacia tota, pro C X scribatur C p vel A C, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{4}{15}$ A C q. cub. ad $\frac{2}{3}$ A C q. cub.

([1]) LEMMA III.

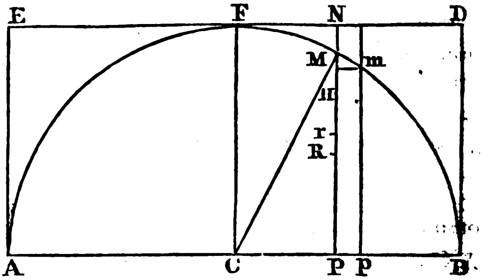
Iisdem positis: dico tertiò quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam et numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ et simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia

([1]) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semi-circuli A F B, et rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra et cylindrus circumscriptus. Sit radius C B $=1$, peripheria circuli hoc ratio descripti $=$ n, abscissa C P $=$ x, ordinata P M $=$ y, quælibet ipsius pars P R $=$ v, R r $=$ d v; peripheria circuli radio P R, descripti $=$ n v, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r $=$ n v d v, velocitas puncti R $=$ v, motus annuli prædicti $=$ n v ² d v, motus totius circuli radio P R, descripti $= \frac{1}{3}$ n v ³, motus circuli radio P M, descripti $= \frac{1}{3}$ n y ³, motus circuli radio P N descripti $= \frac{1}{3}$ n, motus cylindri totius $= \frac{2}{3}$ n.

Sit P p $=$ d x motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti $= \frac{1}{3} n y^3 dx = \frac{1}{3} n dx \times (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} n dx \times (1 - xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} n x^2 dx \times (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti $= \frac{1}{4} n \int dx\, (1 - xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} n x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{14} n \times$ C F M B $= \frac{1}{32}$ n n, adeóque motus sphæræ totius $= \frac{1}{16}$ n n. Est igitur motus cylindri ad motum sphæræ ut $\frac{2}{3}$ n ad 16 n n, seu ut 16 ad $\frac{3}{2}$ n, hoc est, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis; nam quadratum diametri 2 est 4 et 4 $\times$ 4 $=$ 16, circulus verò cujus diameter 2, et peripheria n, est $\frac{1}{2}$ n et tres hujusmodi circuli sunt $\frac{3}{2}$ n.

Materia annuli tenuissimi sphæram et cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis sit m, et velocitas erit ut C F, sive ut 1; adeóque motus $=$ m, et proindè motus cylindri ad motum annuli illius est $\frac{2}{3}$ n ad m, sive ut



2 n ad 3 m, hoc est, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; basis enim cylindri est circulus $\frac{1}{2}$ n et altitudo diameter A F $=$ 2, ideóque cylindrus $=$ n. Prædicti annuli materia sit a a n, ideóque motus ipsius circà axem cylindri $=$ a a n. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter A B; et particula materiæ annuli respondens arcui infinitesimo M m, erit $a^2 \times$ M m et hujus motus $a^2 y \times$ M m $= a^2 dx$, ob proportionem M m : m H (d x) $=$ C M (1) : P M (y). Quarè motus partis F M, annuli est $a^2 x$, et factâ x $=$ 1, motus quadrantis annuli $= a^2$ est motus totius annuli circà proprium axem $= 4 a^2$. Est igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejusdem motum circà axem proprium ut a a n, ad 4 a a, seu ut n ad 4, hoc est, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri est ad

motum sphæræ ut - - -	16 ad $\frac{3}{2}$ n
motus annuli circà axem cylindri est ad motum cylindri ut -	m ad $\frac{2}{3}$ n
et motus annuli circà axem proprium est ad ejus motum circà axem cylindri ut - -	4 ad n.

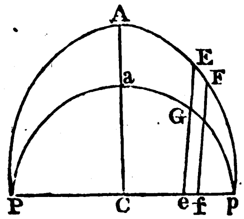
quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: et motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram et cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; et annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, et interea circa axem suum ad planum eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ et firmâ constaret.

Quarè, per compositionem rationum et ex æquo, motus sphæræ circà axem proprium est ad motum annuli ut n^3 ad $64\,m$. Est autem n^3 ad $64\,m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, sed $\frac{2n}{3}$, est quantitas materiæ in Terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^2}{16}$ est summa trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli A F B, et 8 est summa duorum quadratorum ex diametro A B. Quare motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, et ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscumque ad duo quadrata ex diametro, id est, in ratione materiæ ad materiam et numeri 925275 ad numerum 1000000, positâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproximè. Q. e. d.

127. *Lemma.* Semi-axe majori C A et minori C P, describatur semi-ellipsis P A p, atque radio C P, describatur semi-circulus P a p, circà axem P p revolvi concipiantur tum semi-circulus tum semi-ellipsis, erit sphæra motu semi-circuli genita ad sphæroidem semi-ellipseos revolutione descriptam ut $C\,a^2$ ad $C\,A^2$. Sit $p\,e = x$, $G\,e = y$, $C\,p = r$, $C\,A = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{p\,y}{r}$, peripheria circuli radio G e descripti. Prætereà (ex naturâ ellipseos 248. Lib. I.) $C\,a\,(r) : C\,A\,(a) = G\,e\,(y) : E\,e$, ideóque $E\,e = \frac{a\,y}{r}$, hinc peripheria circuli radio E e descripti $= \frac{p\,a\,y}{r\,r}$, ejusdemque circuli area $= \frac{p\,a^2\,y^2}{2\,r^3}$; area autem circuli radio G e descripti est $\frac{p\,y^2}{2\,r}$. Quarè fluxio sphæroidis fit $\frac{p\,a^2\,y^2\,d\,x}{2\,r^3}$, et fluxio sphæræ est $\frac{p\,y^2\,d\,x}{2\,r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2\,r\,x - x\,x$; hinc fluxio sphæroidis est $\frac{2\,p\,a^2\,r\,x\,d\,x - p\,a^2\,x^2\,d\,x}{2\,r^3}$, et fluxio sphæræ $\frac{2\,p\,r\,x\,d\,x - p\,x\,x\,d\,x}{2\,r}$, sumptisque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{p\,a^2\,r\,x^2}{r^3} - \frac{p\,a^2\,x^3}{6\,r^3}$ ad $\frac{p\,r\,x^2}{2\,r} - \frac{p\,x^3}{6\,r}$. Jam loco x, substituatur 2 r, erit sphærois tota, ad totam sphæram ut $\frac{4\,p\,a^2\,r^3}{r^3} - \frac{8\,p\,a^2\,r^3}{6\,r^3}$ ad $\frac{2\,p\,r^3}{r} - \frac{8\,p\,r^3}{6\,r}$, hoc est, ut a^2, ad r^2, sivè in ratione



duplicatâ $C\,A^2$ ad $C\,a^2$. Simili argumento patet sphæram ellipseos semi-axe majori tanquam radio descriptam esse ad ellipsoidem in ratione duplicatâ semi-axis majoris ad minorem.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. et hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11 . 46''$. in antecedentia; et si plures essent Lunæ motus, nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$. ut dies sidereus horarum 23. 56'. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27.7 hor. 43'; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant et in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat et inflexibilis reddatur.

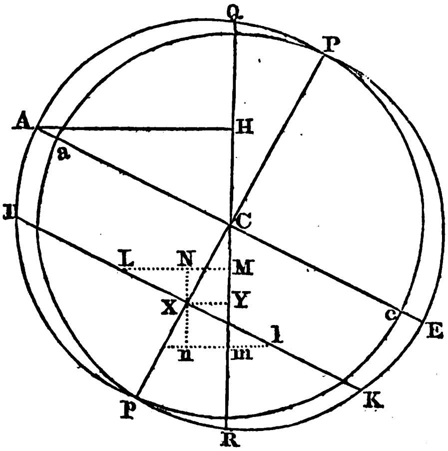
Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni P a p A P e p E quæ globo P a p e superior est; et quoniam globus iste ad Terram illam superiorem (k) ut a C qu. ad A C qu. — a C qu. id est (cùm Terræ semi-diameter minor P C vel a C sit ad semi-diametrum majorem A C ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secundùm æquatorem cingeret et uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 et 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideóque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, et motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; et propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo et globo compositi ad motum $20^{gr}. 11'. 46''$. ut 1436 ad 39343 et 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi Lunarum (ut supra explicui) (m) atque ideò quibus puncta æquinoctialia annuli regredi-

(k) * *Ut a C qu. ad A C qu. — a C qu.* Globus iste est ad Terram totam ut a C^2 ad A C^2 (Lem. præced.) ideóque annulus materiæ inter globum et Terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in Terrâ suprà materiam in globo est ut A C qu. — a C qu.

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. Lib. I.)

(m) * *Atquè ideò.* (Vid. not. 101. Lib. hujus.)

untur (id est vires 3 I T in fig. p. 22. et 24.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum a plano Q R, et his viribus particulæ illæ planum fugiunt; et propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ P a p A P e p E ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis et efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideò ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quàm prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20gr. 11′. 46″. ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.



Cæterum hic motus ([n]) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione sinûs 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1 circiter. ([o]) Et vis Lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio a vi Lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv. ac tota præcessio annua a vi utrâque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

([p]) Si altitudo Terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: et præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

([n]) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum eclipticæ minorem esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. Lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatur motus in ratione sinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum eclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quarè cùm motus æquinoctiorum fit tardissimus, satis accurate minuitur motus ille in ratione sinûs 91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

([o]) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.)

([p]) * *Si altitudo Terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem, eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis laudandis Dissertationibus Vol. III. adjunctis, Descripsimus jam systema Solis, Terræ, Lunæ, et planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

Cometas esse Lunâ superiores et in regione planetarum versari.

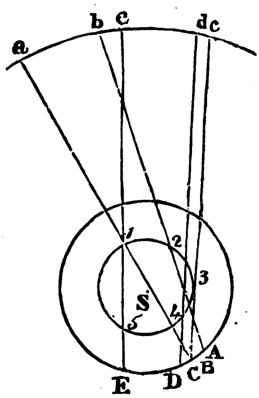
([q]) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, ([r]) sic ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos et Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos et Solem; et justo tardiores vel retrogradi, si Terra sita est ad contrarias partes. ([s]) Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu Terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum cometa, et motu angulari circa Solem tantò celeriùs fertur, ut recta per Terram et cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e Terrâ spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in

nova occurrunt quamplurima de figurâ Telluris, de viribus Solis et Lunæ, præcessionem æquinoctiorum, eâdem quâ hactenus factum est, methodo, accuratiùs licebit computare.

([q]) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ est differentia locorum in quibus cometa ex centro Terræ, vel ex eo superficiei Terræ loco ad quem cometa verticalis est, et ex quovis alio loco superficiei Terræ observatus inter stellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima est in Lunâ, ubi ea in horizonte constituitur, inde verò magis magisque decrescit quò altius Luna suprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non observatur in cometis, patet eos esse Lunâ superiores (30.).

([r]) * *Sic ex parallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circá Solem oritur, hæcque respicit longitudinem cometæ, hoc est, distantiam ejus in eclipticâ a primo Arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas descendere in regiones planetarum, explicabitur in decursu.

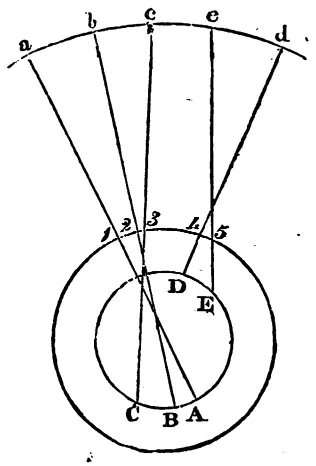
([s]) 128. * *Continget hoc maximè.* Sit S, Sol, A B E, orbita Telluris et a b c, sphæra fixarum ad quam planetæ referantur, exhibeatque, 1, 2, 3, 4, planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur Terra ex A, per B, in C, et intereà planeta ex 1, per 2, in 3, hic planeta ex a, per b, in c, secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex C, per D, in E et pla-



neta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.

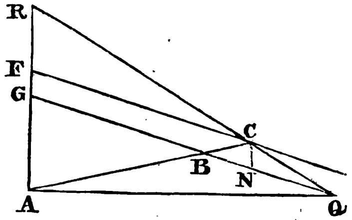
Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum

superioris, sitque A B C, orbis Terræ. Moveatur Terra ex A, per B, et C in D, planeta



autem superior ex 1 per 2 et 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si Terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant, sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu Terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

129. *Lemma.* Datis positione tribus rectis Q A, Q B, Q C, ex eodem puncto Q ductis et in eodem plano jacentibus, ducere rectam A C,

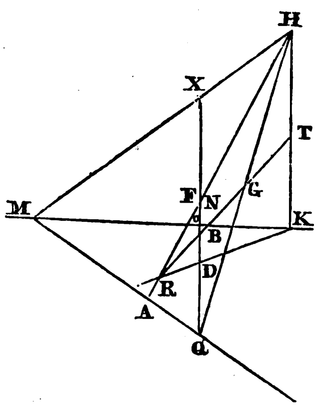


ex puncto quolibet A, ità ut partes A B, C B, sint in datâ ratione m, ad n.

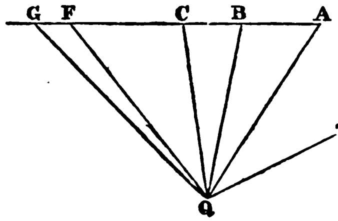
Ex A ducatur utcumque recta A R, rectis Q C, Q B, productis occurrens in G, R, capianturque G F, A G, in datâ ratione m ad n (Prop. XII. Lib. VI. Elem.). Per F, agatur F C parallela rectæ G Q, ipsique Q R occurrens in C, erit juncta A C, recta quæsita. Nam ob parallelas F C, G Q, est A B : B C = A G : G F, sed (per constr.) G F, A G, sunt in datâ ratione m ad n. Quarè eandem inter se rationem habent partes interceptæ A B, B C.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo A Q G, datur latus A G, et prætereà noti sunt anguli A Q G, Q A G, ideóque dabitur A G, ac proindè innotescit etiam G F, datam habens rationem ad A G (per constr.) quare dabitur recta C N æqualis et parallela rectæ G F. Rursus in triangulo Q N C, cognitis angulo C Q N, et angulo C N Q, qui æqualis est angulo F G N, hoc est, anguli priùs inventi A G Q, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere C N, innotescet C Q, tandem in triangulo A C Q, datis lateribus Q A, Q C, et angulo intercepto A Q C, invenientur latus C A atque anguli Q A C, Q C A, id est, magnitudo et positio rectæ A C.

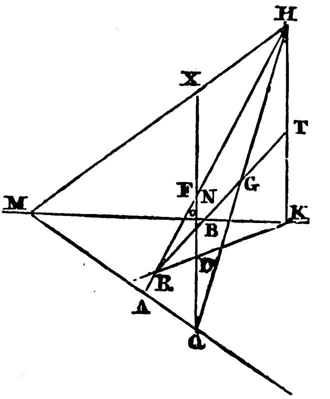
130. *Lemma.* Datis positione quatuor rectis Q A, Q B, R B, R D, in eodem plano jacen-



tibus ducere rectam M K, ità ut M O, sit ad O N ut m ad n, et O N ad N K ut n ad r. Capiatur B G, ad B A, sicut n + r ad m. Item capiatur F B ad B D ut m + n ad r. Junctæ rectæ Q G, R F, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur H K parallela rectæ B D; itemque H M, parallela rectæ R B, erit M K recta quæsita. Nam propter parallelas H M, T N (per constr.) erit K N ad N M, ut K T ad T H. Sed quia H K parallela est rectæ F D, K T est ad T H ut D B ad B F, hoc est, (per constr.) ut r ad m + n, ac proindè K N est ad N M ut r ad m + n. Rursus ob parallelas H K, O X, erit M O ad O K ut M X ad X H, sed quia H M, parallela est rectæ A G, erit M X ad X H ut A B ad B G, id est, (per constr.) ut m ad colligitur. Sunto ♈ Q A, ♈ Q B, ♈ Q C observatæ tres longitudines cometæ sub initio motûs, sitque ♈ Q F longitudo ultimò observata, ubi cometa videri desinit. [a] Agatur recta A B C, cujus partes A B, B C rectis Q A et Q B, Q B et Q C interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur A C ad G, ut sit A G ad A B ut tempus inter observationem primam et ultimam ad tempus inter observationem primam et secundam, et jungatur Q G. Et si cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur, foret angulus ♈ Q G longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur F Q G, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra et cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈ Q G, et sic motum apparentem cometæ velociorem reddit: sin cometa pergit in easdem partes cum Terrâ, eidem subducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; [b] uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, et idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus est, neglecto videlicet ejus incremento



n + r. Est igitur M O ad O K ut r ad m + n. Quare, dividendo et ex æquo, tres rectæ M O,

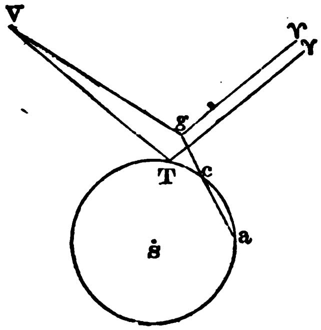


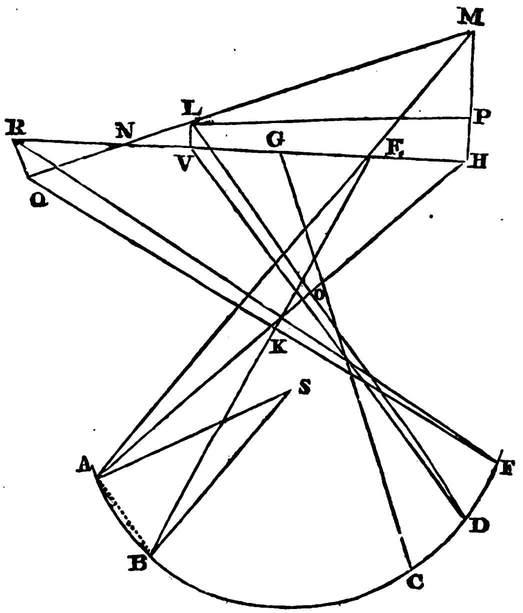
O N, N K, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, sunt magnitudine datæ. Prætereà dantur etiam B F et B G, utpotè habentes datam rationem ad B D et R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F et angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H. Similiter in triangulo Q B G, datis lateribus Q B, B G, et angulo Q B G, dabitur angulus B Q G; quarè in triangulo Q F H, datis duobus angulis Q F H, F Q H, cum latere Q F, quod est summa vel differentia rectarum datarum Q B, Q F innotescet latus Q H. Tandem in triangulo Q H M, dato angulo H Q M qui est summa vel differentia notorum angulorum B Q A, H Q B, datoque angulo Q M H qui æqualis est angulo dato Q A B, simulque noto latere Q H, innotescent latera H M, Q M. Simili prorsus modo invenientur latera R K, H K, in triangulo R K H. Igitur in triangulo M H K, notis lateribus H M, H K, et angulo intercepto M H K, qui æqualis est angulo dato A B Q, innotescent anguli H M K, H K M et basis M K. Datis autem angulis H M Q, H M K, dabitur horum summa vel differentia Q M K, hoc est positio rectæ M K, ob rectam Q M, positione datam. Simili modo rectæ Q O, R N, R K et anguli quos M K cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur.

[a] * *Agatur recta A B C.* (129.)

[b] * *Uti modò exposui.* (128.)

vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò cometæ ex hâc parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, a c T orbem magnum, a locum Terræ in observatione primâ, c locum Terræ in observatione tertiâ, T locum Terræ in observatione ultimâ, et T ♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈ T V æqualis angulo ♈ Q F, hoc est, æqualis longitudini cometæ ubi Terra versatur in T. Jungatur a c, et producatur ea ad g, ut sit à g ad a c ut A G ad A C, et erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in rectâ a c uniformiter continuato, attingeret. Ideóque si ducatur g ♈ ipsi T ♈ parallela, et capiatur angulus ♈ g V angulo ♈ Q G æqualis, erit hic angulus ♈ g V æqualis longitudini cometæ e loco g spectati; et angulus T V g parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. (e) Hic autem locus V orbe Jovis inferior esse solet.





(e) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat vestigium cometæ in plano eclipticæ, sintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano eclipticæ præcedenti methodo inventa. Sit S, Sol, A B C D, orbis magnus, sintque A, B, C, D, quatuor Terræ loca ad tempora observationum nota. In triangulo ASB, dantur latera S A, S B, daturque angulus A S B, differentia scilicet locorum Terræ e Sole visorum; quarè dabuntur anguli S A B, S B A, notaque erit in partibus semi-diametri orbis magni recta A B, chorda nempè arcûs a Tellure interim percursi. Rursus in triangulo K A B, dantur omnes anguli, nam datur angulus K A B, qui est summa vel differentia notorum angulorum S B A, S B K. Quarè datur ratio laterum A K, A B, sed data est ratio rectarum S A, A B, dabitur itaque ratio S A ad K A. At (131.) nota est ratio inter K O et K H, innotescet igitur ratio inter S A et K H; quarè datur A H, distantia cometæ a Terrâ in partibus semi-diametri orbis magni. Simili plane modo invenientur aliorum locorum distantiæ a Terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi, cometa videri desinit, ex datis observationibus inito computo per methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

132. Cometæ vestigium in plano eclipticæ

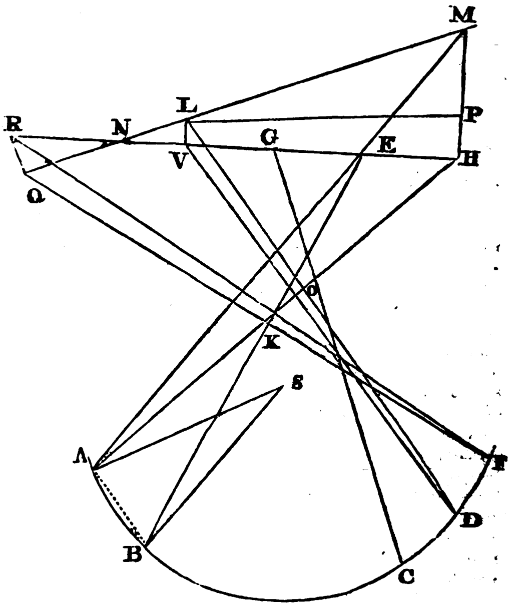
Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. ([d]) Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in

jam determinavimus; ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum eclipticæ erecta intelligatur normalis H M, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito A H, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; est enim positio rectæ A H, ejus longitudo et angulus M A H, latitudo. Similiter in loco V, ad idem eclipticæ planum erigatur normalis V L, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto D V, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta L M, est ipsa trajectoria quæsita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sivè rectam A M, esse ad rectam A H, ut secans latitudinis in H, ad radium, et ità porrò de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur L M, recta scilicet percursa a cometa, dum Tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim L P ipsi V H parallela cum rectâ M E concurrens in P. In triangulo P L M, præter angulum rectum in P, datur latus L P, æquale lateri V H, atque etiam datur latus P M, æquale differentiæ rectarum datarum M H, L V, quarè dabitur L M. Producatur M L, donec cum H V, concurrat in N, erit N nodus. Præterea N V erit ad V L, ut V H ad P M, itemque L N ad L V ut L M ad M P, et ideò dabuntur L N, L V; capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, et observationem in L, ut N L ad L M, habebitur tempus inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum; cùm enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis; cùm enim detur punctum N, et propter tempus cognitum inter observationem in L, et appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus Terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi a loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum, ac proindè innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad eclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ e Terrâ visus, illiusque distantia a Terrâ. Determinentur ut suprà vestigium orbitæ in plano eclipticæ H E V R, ipsaque vera cometæ orbita M L N Q. Capiatur H R ad H V, ut spatium inter observationem primam tempusque datum ad spatium inter observationem primam et quartam. Dato Terræ loco ad tempus propositum, putà F, datur positio rectæ F R, ac proindè datur longitudo cometæ quæsita (132). Præterea fiat R Q ad R N, sicut M H ad H N, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri potest distantia cometæ a Terrâ (ibid.) in hâc ergò hypothesi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re consulat lector Opusculum clariss. viri Dominici Cassini de Cometâ an. 1664; Davidis Gregorii Astronomiam Physicam, et Cassini filii Theoriam Cometarum in Monumentis Paris. an. 1727.

([d]) * *Pergunt hæc corpora.* Est et alia parallaxis proveniens ex motu Terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab eclipticâ versus



boream aut austrum, undè fit ut cometæ in sphærâ fixarum a cursu circulari deflectere et lineam admodum irregularem videantur describere. Cùm enim planum in quo cometa movetur, cum plano eclipticæ in quo Terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà eclipticam in septentrionem ascendit, modò infrà eclipticam in fine cursûs, ubi motûs apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, et quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; et insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in perigæis et periheliis, ubi propiùs adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis et inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ([e]) ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, et in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur et lucis quantitas et apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè et ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a Flamstedio observata et micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideóque lata erat tantum 11″. vel 12″. Luce verò et claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: et quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, et diameter apparens globi sit quasi 21″. ideóque lux globi et an-

austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, Tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam Tellus ipsa movetur in plano eclipticæ, cometa pro diversis Terræ locis observatus, modò versùs boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propèmodum in circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere solent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus disparentes cometas satis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis et inferiorum planetarum descenderunt.

([e]) 135. * *Ex luce capitum.* Intelligantur duæ superficies sphæricæ concentricæ, minor una, major altera, et in centro utriusque constitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios suos per omnem circuitum diffundit, evidens est eandem radiorum quantitatem in concavâ superficie utriusque sphæræ contineri, ideóque densitates radiorum erunt in ratione superficierum sphæricarum inversè, hoc est, in ratione duplicatâ semi-diametrorum sive distantiarum a corpore lucido inversè (14. Lib. I.). Quare nullâ distantiarum habitâ ratione, sensatio quæ a radiis nervos opticos percutientibus excitatur, est ut quadratum distantiæ inversè. Sed quò remotius est lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione distantiarum (loco suprà cit.) hoc est, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quarè, componendo, corporis cœlestis a Sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in ratione quadruplicatâ distantiæ. Erit itaque quadratum distantiæ cometæ a Sole ad quadratum distantiæ planetæ ab eodem in ratione compositâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè distantia cometæ a Sole est ad distantiam planetæ ab eodem in ratione compositâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ et ratione subduplicatâ lucis planetæ ad lucem cometæ.

nuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, et 12″. ad 30″. directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense Aprili, ut auctor est Hevelius, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, et cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′. at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, et nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cùm diameter capillitii cometarum raró superet 8′. vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non raró conferri possit, eamque aliquando superet, manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quàm planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum et crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longè infra sphæram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate et expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari et intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam et fulgentissimam emittit, (g) Jovem ipsum splendore suo multùm

(f) * *Hæ vel ex reflexione fumi sparsi,* ut posteà probabitur.

(g) * *Jovem ipsum splendore suo.* Id variis observationibus confirmat Newtonus in Opusculo de Mundi Systemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. et 15. stilo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat et luci multorum Jovium per tantum spatium diffusæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut observabat Flamstedius, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17. mensis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit Cassino per telescopium ped. 35. pauló minor globo Saturni. Die 8. mensis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem et latam, et quasi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec priùs disparentem quàm Sol ipse superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur a Sole, ideóque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, et caudas cùm maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a Terrâ Solem versùs, ac decrescente in eorum recessu a Sole versùs Terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante Hevelio) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideóque præterierat perigæum; splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683. (observante eodem Hevelio) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad Sept. 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensuratâ colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. esse tantum 6′. 5″. inclusa coma, at Sept. 2. esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in viciniâ Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis Decembris, et iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideóque tunc erant in perigæis. Verùm splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; et splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decemb. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, et Decemb. 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 men-

inciperet suprà horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor lucem nubium usque ad ortum Solis, et immediato Solis splendori solùm cedendo vincebat longè lucem omnium stellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna in tantâ Solis orientis vicinitate cerni solet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari et in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari et splendore longè fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longè superabit, adeóque erit Soli vicinior. Diebus 12. et 15. ejusdem mensis, cauda hæc per spatium longè majus diffusa apparuit rarior, et luce tamen adeò forti ut stellis fixis vixdum apparentibus cerneretur, et mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit.

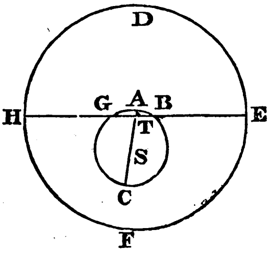
sis Decemb. conspectum et a Flamstedio observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. Decemb. 15. et 17. apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. Decembr. 26. velocissimè motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut stella quartæ, Jan. 9. ut stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plagâ Solis maximè splenduêre, ex alterâ perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentia, concluditur magna Solis et cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, et maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quâtenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce Solis a se reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ

(h) * *Luce Solis a se reflexâ.* Nam a Terrâ recedentibus cometis et ad Solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S Solem, T, Terram, circulus D E F H, sphæram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce Solis a se reflexâ, (Cor. 1.) ii non videbuntur, nisi a



Sole ità illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Prætereà cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad Solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam a Sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphæra A B C G, Soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis defectum, detegi possit, priusquam ad sphæræ hujus superficiem pervenerit, juncta recta S T, producatur utrinque donec superficiei huic occurrat in A, et C. Per T, ductum intelligatur planum H E, cui normalis est recta A C, planum illud sphæram dividet in duo hemispheria quorum unum H F E, est versus Solem; alterum verò H D E, Soli opponitur. Cometæ omnes in sphæræ segmento B C G, existentes, videbuntur in hemisphærio versus Solem, omnes autem qui versantur in segmento B A G videbuntur in hemisphærio quod Soli opponitur. Quarè si segmentum B C G, majus sit segmento B A G, plures cometæ videbuntur in hemisphærio versus Solem quàm in opposito. Jam verò cometæ nudis oculis se priùs detegendos non exhibent quàm sint Jove propiores; ponatur itaque S A, circiter $\frac{1}{2}$ distantiæ Martis a Sole, hoc est S A sit circiter dupla ipsius S T, erit segmentum B G C plusquam quadruplo majus segmento B A G, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemispherio versus Solem quàm in hemispherio opposito. At si cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret S A, longè major quàm S T, et ideò cometæ sæpiùs deberent apparere in partibus Soli oppositis, forent enim Terræ viciniores qui in segmento B A G, versantur, cæteros verò in segmento B C G, Sol interpositus obscuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

viciniores, qui in his partibus versarentur; et Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeò illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est a latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. ([k]) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentiâ destituuntur. Nam cometæ vias obliquas et nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, et motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissimè conservant. ([l]) Fallor ni genus planetarum sint, et motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. ([m]) Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; et atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, et corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, et firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris et profundioribus et crassioribus abscondi debent.

([k]) * *Hinc etiam manifestum est.* Clariss. Cassinus in Mon. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Observatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras esse apparentias conjectatur, non secus ac directus planetarum circumsolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujusce astronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà seriem signorum cursum tenuisse conabimur ostendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, postquam scilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas esse nonnunquam cometarum vias et cursui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Cartesiani. Verùm quâ ratione diversi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari possint, difficilè intelligitur, cùm enim cometæ in regiones planetarum descendant, necesse videtur ut rapidissimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citòque destruantur, ac tandem cometæ hujusce torrentis vi rapiantur. At summè regulares esse cometarum motus, et contrà cursum planetarum diutissimè conservari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

([l]) * *Fallor, ni genus planetarum sint.* Quàm gravibus fundamentis nitatur hæc sententia, manifestum erit posteà ex variis cometarum phænomenis.

([m]) * *Capita cometarum* atmosphæris ingentibus cingi variis argumentis imposterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipsis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decursu constabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmosphæras tribuit.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

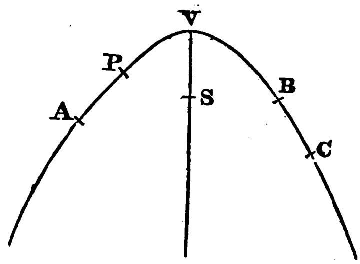
Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

([n]) Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII. et XIII. Libri Tertii.

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt, orbes erunt ellipses, et tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum ([o]) in axium principalium ratione sesquiplicatâ. ([p]) Ideóque cometæ maximâ ex parte supra planetas versantes, et eo nomine orbes axibus majoribus describentes,

([n]) * *Patet.* Quoniam cometæ motu suo lineas curvas circà Solem describunt, ut ex observationibus constat, vi aliquâ a motu rectilineo detorquentur (per leg. I.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas a lineis rectis detorquet maximè tendit versùs Solem ut potè corpus cætera omnia systematis solaris corpora longè superans, eadem quoquè vis in cometas Solem maximè debet respicere. Sed vis acceleratrix in planetis est in duplicatâ ratione distantiarum a Sole inversâ (Prop. VIII. Lib. III.). Quarè eandem quoque legem observare debent cometæ quæ sunt corpora planetis similia, ac proinde (Cor. Prop. XIII. Lib. I. et Prop. XIII. Lib. III.) cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moventur et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si Sol e loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis Sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longè recedit a communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus a Sole maximè dissitis commorantur, non magnopere hujus centri situm turbare possunt. Quarè orbitarum suarum umbilicus non longè distabit a centro Solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat, patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci, cometas in lineis rectis moveri posuerunt, et indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ a rectâ non multum differat. Sit A P V B C, sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit Solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem A P, describit; fieri potest ut reliquo tempore, dum scilicet a loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat et sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in Tellure circà Solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu Telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem A P V B, sub solaribus radiis abscondatur et tunc primùm observetur cùm ad locum B pervenerit, lineam B C descripturus. In hoc utroque casu via cometæ a lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ a Sole absorpti credentur, quia ad Solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, e Sole videbuntur emergere quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum a Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus Solem



descendit, putà dum A P percurrit posteà ad Solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum P V B describit, tandemque dum ad alteras Solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa a priori in A P diverso, et duæ rectæ A P, B C pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus plerumque respondeant. Id fit scilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At si tota simul consideretur tam in ascensu versus Solem quàm in descensu, aliam nullam præter sectionem conicam satisfacere constabit.

([o]) * *In axium principalium ratione sesquiplicatâ.* (Prop. XV. Lib. I.)

([p]) * *Ideóque cometæ maximâ ex parte suprà planetas versantes,* quo tempore scilicet oculos nostros fugiunt, et eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ describentes tardius revolventur.

tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo majore axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1. ideóque erit annorum 240.

Corol. 2. (p) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) velocitas cometæ omnis, erit semper (q) ad velocitatem planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicatâ ratione duplæ distantiæ planetæ a centro Solis, ad distantiam cometæ a centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in quâ Terra revolvitur, semi-diametrum maximam esse partium 100000000: (r) et Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, et motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideóque cometa in eâdem Telluris a Sole distantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, et motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. (s) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum et horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideóque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio

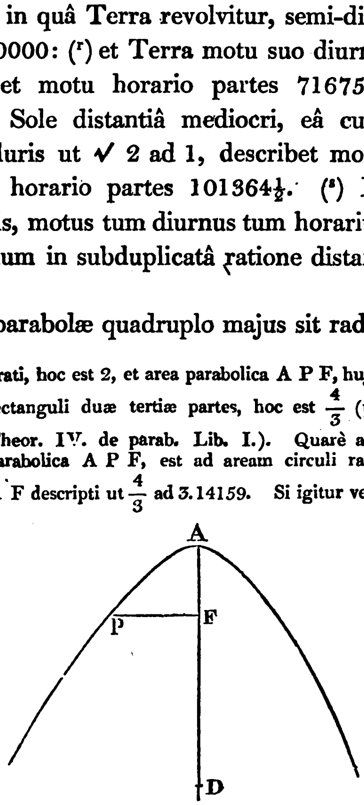
(p) * *Orbes autem erunt parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum sunt admodum excentrici, ut ex observationibus colligitur, et valdè exigua est portio orbis quem toto apparitionis tempore describunt, exiguo enim temporis spatio sese conspicuos præbent. Verùm si in ellipsi centrum ad infinitam ab umbilico distantiam removeatur, portio ellipsis cujus abscissa finita est, abit in parabolam. Quarè elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujusvis circà Solem in circulo revolventis;* hoc est, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et Terra.* Fiat hæc analogia: ut est tempus periodicum Terræ circà Solem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ descriptam.

(s) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. Prop. IV. et Prop. XV. Lib. I. vel per Cor. 6. Prop. XVI. ejusdem Libri.)

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A P F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (Theor. II. de parabolâ, Lib. I.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ P F et abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, et area parabolica A P F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quarè area parabolica A P F, est ad aream circuli radio A F descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velo-



citas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A P, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ a Sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa de-orbis magni, et quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, et singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna et horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. et ab iisdem ad rectam quamvis positione datam H N demitte perpendicula quotcunque A H, B I, C K, D L, E M, F N.

Cas. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia sunt intervalla H I, I K, K L, &c. collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b, &c. secundas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias d, 2 d, 3 d, &c. id est, ita ut sit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. et sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic est f. Deinde erecta quacunque perpendiculari R S, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone

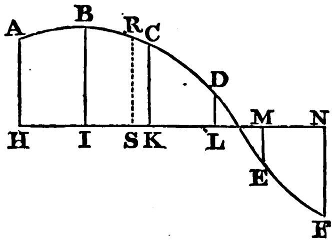
scribit arcum parabolicum A P, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3 \times \sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9 \times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159. Jam tempus periodicum Terræ circà Solem sit 365.2565 dier. et cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ Terræ a Sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum A P, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14. hor. 46'. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad Solem ductis describit diebus 109. hor. 14. 46'. Quarè area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ et singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (Cor. 6. Prop. IV. Lib. I.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proindè cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris et majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. Lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (Cor. 2. Theor. I. de parab. Lib. I.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. Lib. II.

intervalla H I, I K, K L, L M, &c. unitates esse, et dic $A H = a$, $- H S = p$, $\frac{1}{2} p$ in $- I S = q$, $\frac{1}{3} q$ in $+ S K = r$, $\frac{1}{4} r$ in $+ S L = s$, $\frac{1}{5} s$ in $+ S M = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpen-

b 2 b 3 b 4 b 5 b
c 2 c 3 c 4 c
d 2 d 3 d
e 2 e
f



diculum M E, et præponendo signa negativa terminis H S, I S, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, et signa affirmativa terminis S K, S L, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et signis probe observatis, erit $R S = a + b p + c q + d r + e s + f t$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla H I, I K, &c. collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b; secundas per intervalla bina divisa c, 2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias per intervalla terna divisas d, 2 d, 3 d, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, 2 e, &c. et sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $A H = a$, $- H S = p$, p in $- I S = q$, q in $+ S K = r$, r in $+ S L = s$, s in $+ S M = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum M E, et erit ordinatim applicata $R S = a + b p + c q + d r + e s + f t$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, et parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. (y) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari geometricè.

(y) *Potest autem parabola, per methodos notissimas* (165. Lib. I.) *semper quadrari geometricè.* Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva parabolica, eò propiùs area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent H I, I K, K L, L M tempora inter observationes H A, I B, K C, L D, M E observatas quinque longitudines cometæ, H S

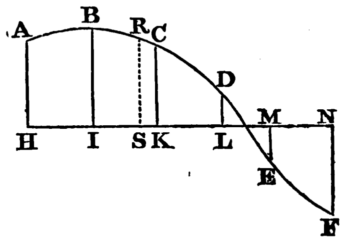
b 2 b 3 b 4 b 5 b

c 2 c 3 c 4 c

d 2 d 3 d

e 2 e

f



tempus datum inter observationem primam et longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis A B C D E; et per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata R S, erit R S longitudo quæsita.

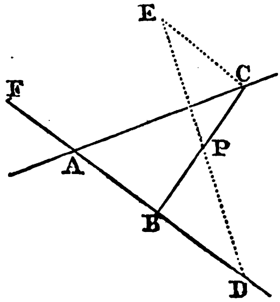
Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(*) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, putà graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem et latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, putà graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

(z) 137. * *Si longitudinum observatarum,* (patet per not. in Cor. præced.). Methodus Lemmatis præcedentis, quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit clariss. Meierus Tom. II. Comment. Acad. Petropol. ad Investiganda Solstitiorum Momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, et tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes et parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat et parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verùm in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736, ubi determinandæ Telluri figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ.

LEMMA VII.

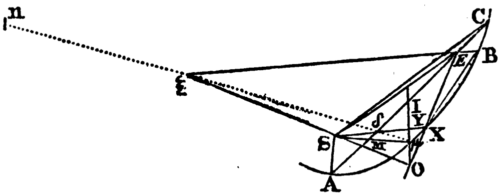
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* B C, *cujus partes* P B, P C, *rectis duabus positione datis* A B, A C, *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo P ad rectarum alterutram A B ducatur recta quævis P D, et producatur eadem versus rectam alteram A C usque ad E, ut sit P E ad P D in datâ illâ ratione. Ipsi A D parallela sit E C; et si agatur C P B, erit P C ad P B ut P E ad P D. Q. e. f.

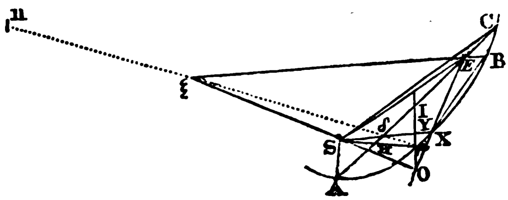
LEMMA VIII.

Sit A B C *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* A C *bisecta in* I *abscindatur segmentum* A B C I, *cujus diameter sit* I μ *et vertex* μ. *In* I μ *producta capiatur* μ O *æqualis dimidio ipsius* I μ. *Jungatur* O S, *et producatur ea ad* ξ, *ut sit* S ξ *æqualis* 2 S O. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* C B A, *et agatur* ξ B *secans* A C *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* A C *segmentum* A E *tempori proportionale quamproximè.*



Jungatur enim E O secans arcum parabolicum A B C in Y, et agatur μ X, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, et actæ E O occurrat in X; ([a]) et erit area curvilinea A E X μ A ad aream curvilineam A C Y μ A ut A E ad A C. Ideóque cùm triangulum A S E sit ad

([a]) * *Et erit area.* Quoniam chorda A C bisecta est in I, erit semi-segmentum A μ I æquale semi-segmento μ I C. Item quia μ X tangit parabolam in μ, erit μ X, parallela chordæ A C (per Lem. IV. de conic. Lib. I.) ac proindè triangulum O I E simile est triangulo O μ X, ideóque ob I O triplam ipsius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O X, noncuplum et triangulum I O E trapezii I μ X E, sesquioctavum. Præthereà triangulum I A O, est trianguli I A μ, sesquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cùm idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis O I sesquialtera basis μ I, triangulum verò A μ I, subsesquitertium est semi-segmenti A μ I (Prop. XXIV. Archimed. de parab. vel Theor. IV. de parab. Lib. I.). Quare triangulum A O I est sesquioctavum semi-segmenti A μ I, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ et subsesquitertiâ ac proindè triangulum A O I, est ad semi-segmentum A μ I sicut triangulum I O E, ad trapezium μ X I E, et triangulum A S C in eâdem ratione, erit area tota A S E X μ A ad aream totam A S C Y μ A ut A E ad A C. Cùm autem ξ O sit ad S O ut 3 ad 1, et E O ad X O in eâdem ratione, erit S X ipsi E B parallela; et propterea si jungatur B X, erit triangulum S E B triangulo X E B æquale.



Unde si ad aream A S E X μ A addatur triangulum E X B, et de summâ auferatur triangulum S E B; manebit area A S B X μ A areæ A S E X μ A æqualis: atque ideò ad aream A S C Y μ A ut A E ad A C. Sed areæ A S B X μ A æqualis est area A S B Y μ A ([b]) quamproximè, et hæc area A S B Y μ A est ad aream A S C Y μ A, ([c]) ut tempus descripti arcûs A B ad tempus arcûs totius A C. Ideóque A E est ad A C in ratione temporum quamproximè. Q. e. d.

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est A E ad A C in ratione temporum ([d]) accuratè.

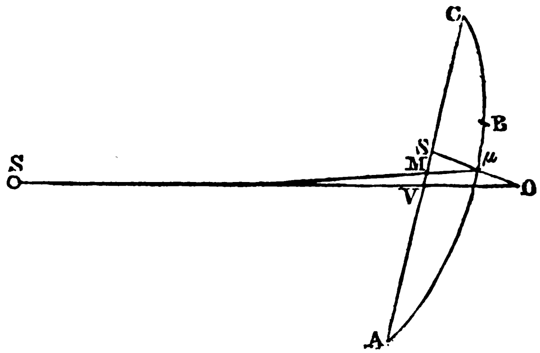
vicissim trapezium μ X I E est ad semi-segmentum A μ I ut I E ad A I, ac proinde, componendo area curvilinea A μ X E, est ad semi-segmentum A μ I, ut A E, ad A I, ideóque area curvilinea A μ X E est ad segmentum totum A μ C ut A E ad A C.

([b]) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

([c]) * *Ut tempus descripti arcûs.* (Prop. I. Lib. I.)

([d]) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B, vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet a vertice μ versus C quàm si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior et a tangente μ X, magis deflectit quàm portio μ C, a vertice μ, remotior. Quare si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur, ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, punctum E, non multum distat a chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometâ enim existente



in μ, ubi chorda A C, dividitur accurate in ratione temporum; erit recta E C, major quàm A E, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (Cor. 3. Prop. XL. Lib. huj.) describit arcum

Scholium.

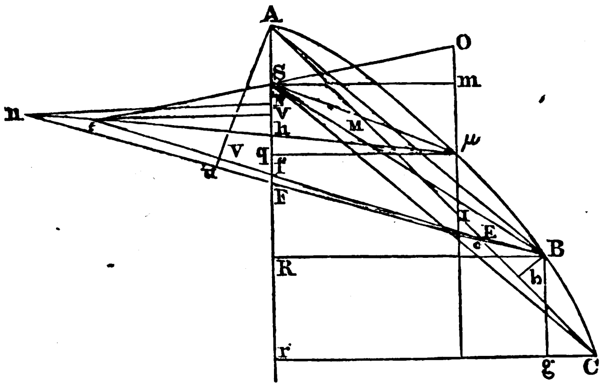
Si jungatur $\mu\,\xi$ secans A C in δ, et in ea capiatur ξ n, quæ sit ad μ B ut 27 M I ad 16 M μ: acta B n secabit chordam A C in ratione temporum (e) magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra

B C, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum B A. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quàm versus A, ob rationem modò allatam.

139. Si vertex μ, segmenti parabolici A μ C parum distet a vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ, recta S μ, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam A C, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta S μ admodum magna respectu abscissæ μ I, erit S V, tripla ipsius M V. Quoniam enim rectæ S V O, S M μ; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit I V ad V M ut I O ad μ O, hoc est, (per constr. Lem. VIII.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit V ξ = 3 V S + 3 I μ; quoniam enim (per constr.) S ξ = 2 S O, erit O ξ = 3 S O = 3 S V + 3 V O. Jam utrinque auferatur V O, fiet V ξ = 3 S V + 2 V O. Sed ob rectas V O, M μ parallelas, V O est ad M μ, ut I O ad I μ, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque 2 V O = 3 M μ. Præterea rectæ S μ, I μ, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ est chordæ A C parallela (per Theor. III. de parab. et Lem. IV. de conic.). Quarè æquales sunt anguli M I μ, I M μ, ac proindè recta M μ = I μ; undè fit 3 I μ = 2 V O, et V ξ = 3 V S + 3 I μ.



(e) 142.* *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, A S = f, ideóque latus rectum principale = 4 f. Ponatur R B = y, r C = x, erit area A S B C = $\frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$, et area A S B A = $\frac{y^3 + 12 f^2 y}{24 f}$ (Theor. IV. de parab.); ac proinde area A S B C, est ad aream A S B A, ut $\frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$ ad $\frac{y^3 + 12 f^2 y}{24 f}$, seu ut $x^3 + 12 f^2 x$ ad $y^3 + 12 f^2 y$, id est, in ratione temporum accuratè. Præterea est A C = $\sqrt{A r^2 + r C^2}$ = $\frac{\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f}$; quarè si fiat $x^3 + 12 f^2 x$ ad $y^3 + 12 f^2 y$ ut $\frac{\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f}$ ad

$$A\,E = \frac{(y^3 + 12 f^2 y)\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^3 + 12 f^2 x)},$$

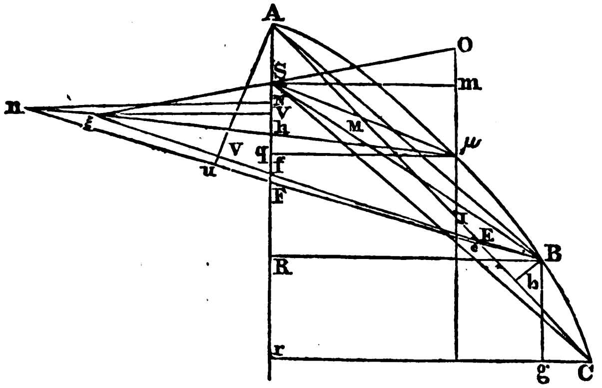
erit quoque recta A C ad hanc rectam A E, in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ A E, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μ O perpendicularis S m, hæc erit æqualis ordinatæ q μ. Deinde (Theor. I. de parab.) q μ, dimidia est ipsius r C seu $\frac{1}{2}$ x, et μ m = q S = $\frac{x x - 16 f f}{16 f}$. Præterea est μ I = 2 μ O (per constr.) et $\mu\,I = \frac{A I^2}{4 S \mu}$ (165 et Theor. II. de parab.) Sed est $A\,I^2 = \frac{x^4 + 16 f^2 x^2}{64 f^2}$, et $S\,\mu^2 = \left(\frac{x^2 - 16 f^2}{16 f}\right)^2 + \frac{1}{4} x x$, quare est μ O seu punctum ξ, si punctum B magis distat a vertice principali parabolæ quàm punctum μ; et citra, si minus distat ab eodem vertice.

$\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}$, ideóque $SO = \surd\left\{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}\right)^2\right\}$ et $\xi O = 3\surd\left\{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4 + 16f^2x^2}{32fx^2 + 512f^2x} + \frac{16ff - xx}{16f}\right)^2\right\}$. Insuper ex puncto ξ, ad abscissam A R erectâ perpendiculari ξV, ob similitudinem triangulorum S m O, S ξ V, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Prætereà $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, et $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum simi-

erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ B b, perpendiculari ad A C, similia erunt triangula E A V, B b e, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, et invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atque, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE = \frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco A b, B b, A V, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit A E, paulò minor quàm $\frac{(y^3 + 12f^2y)\surd\overline{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$

Investigandus superest valor rectæ A e, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; sed inventa est suprà recta S q, invenietur itaque q b,



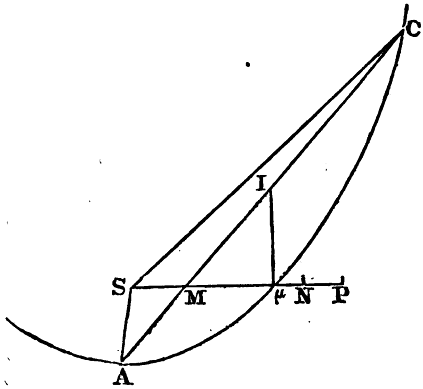
litudinem $\xi V\,(x) : BR\,(y) = Vf : Rf$, et componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR + BR}{\xi V + BR}$, datur itaque R f, per x et y. Prætereà $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \surd\overline{RB^2 + Rf^2}}{y}$, et hinc $\xi B = \surd\overline{RB^2 + Rf^2} + \frac{x \times \surd\overline{RB^2 + Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo A B C, dantur latera A B, A C, et prætereà datur latus B C; ductâ enim B g perpendiculari ad r C, erit $BC = \surd\overline{Bg^2 + gC^2} = \surd\overline{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \surd\frac{3}{4}BC^2$. Insuper ducatur A V perpendicularis ad A B, ob similitudinem triangulorum A V f, B R f,

ac proindè etiam $h\mu = \surd\overline{qh^2 + q\mu^2}$. Prætereà $\xi S : SO = \xi h : h\mu$; quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \surd\overline{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota recta $\xi\mu = \surd\overline{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\surd\overline{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$. Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27\,MI \times \mu B}{16\,M\mu}$. Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque M I, ideóque tota recta $n\mu$. Insuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque h N, ac proindè et N n, ob triangulum h r N, rectangulum. Prætereà (ex præced.) inventa est h R, ideóque etiam datur n R. Jam fiat $rN : NF = BR : RF$, et invertendo $NF : RF = rN : BR$, atque componendo $NF + RF : RF = rN + BR : BR$, hinc

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *et* μ M *et longitudo* $\frac{\mathrm{A\,I\,q}}{4\,\mathrm{S}\,\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam 4 S μ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *et* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *et* S P *sit ad* S N *ut* S N *ad* S μ. *Cometa, quo tempore describit arcum* A μ C, *si*

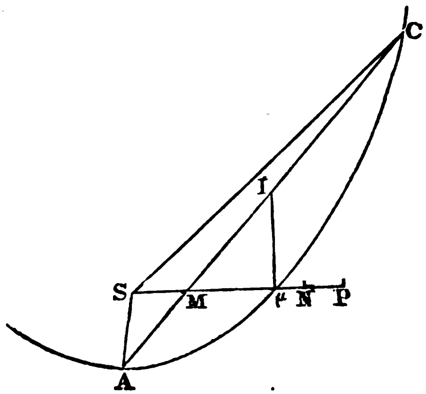
$\mathrm{R\,F} = \frac{\mathrm{B\,R} \times \mathrm{N\,R}}{\mathrm{r\,N} + \mathrm{B\,R}}$, ideóque datur $\mathrm{B\,F} = \sqrt{\mathrm{B\,R}^2 + \mathrm{R\,F}^2}$. Deinde B F : B R = r F : F N, et inde $\mathrm{r\,F} = \frac{\mathrm{B\,F} \times \mathrm{F\,N}}{\mathrm{B\,R}}$, atque recta tota $\mathrm{r\,B} = \frac{\mathrm{B\,F} \times \mathrm{F\,N}}{\mathrm{B\,R}} + \sqrt{\mathrm{B\,R}^2 + \mathrm{R\,F}^2}$. Ducatur recta A u, perpendicularis ad A B, erit ob triangulorum A u F, R B F, similitudinem A F : A u = R F : R B, ideóque $\mathrm{A\,u} = \frac{\mathrm{R\,B} \times \mathrm{A\,F}}{\mathrm{R\,F}}$, et hinc prorsus ut suprà habetur $\mathrm{A\,e} = \frac{\mathrm{A\,b} \times \mathrm{A\,u}}{\mathrm{B\,b} + \mathrm{A\,u}}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas A E, A e, per x, y, et quantitates constantes. Jam loco A b, B b, A u, substitutis eorum valoribus analyticis, fit A e, paulò major quàm A E, et paulò minor quàm $\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f (x^3 + 12 f^2 x)}$. Quarè recta B n, secabit chordam A C, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B.

Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam $\mathrm{A\,e} = \frac{\mathrm{A\,b} \times \mathrm{A\,u}}{\mathrm{A\,b} + \mathrm{A\,u}} = \mathrm{A\,b} - \frac{\mathrm{A\,b} \times \mathrm{A\,b}}{\mathrm{A\,u} + \mathrm{B\,b}}$ (ex dem.) erit A e semper minor quàm A b. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12 f^2 x : y^3 + 12 f^2 y = \frac{\sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f} : \frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$, si A e æqualis foret huic quarto termino, haberetur ratio temporum accuratè (Prop. I. Lib. I.). Sed quartus ille terminus major est rectâ A e; nam terminus ille major est quàm chorda A B, est enim $\mathrm{A\,B} = \frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f} = \sqrt{x^3 + 12 f^2 x} \times \frac{\sqrt{y^4 + 16 f^2 y^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$ hæc autem quantitas minor est quàm $\frac{(y^3 + 12 f^2 y) \sqrt{x^4 + 16 f^2 x^2}}{4 f \sqrt{x^3 + 12 f^2 x}}$. Sed (per constr.) ità ducitur μ n, ut recta n B semper secet chordam A C in puncto e, quod proximius est puncto C quàm punctum E; quare cùm recta A e semper minor sit verâ, major tamen quàm A E, hæc magis quàm illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta n B, secat chordam A C, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A.

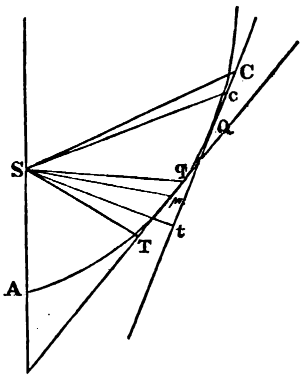
(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139 Lib. huj. et Theor. I. et II. de parab. Lib. I.).

progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi S P *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* A C.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ. (h) Ideóque contentum sub longitudine in tangente descriptâ et longitudine S μ esset ad contentum sub longitudinibus A C et S M, ut area A S C μ ad trian-

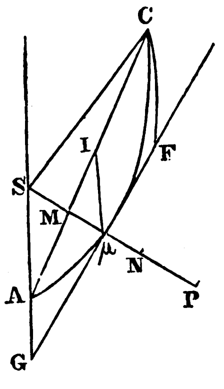


(g) * *Area, quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ, area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ, a cometa descrip-



tæ et a parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, velocitas in C, est ad velocitatem in μ ut S T ad S t (Cor. 1. Prop. I. Lib. I.) sed velocitates in C, et μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, putâ C c et q μ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t. Quarè triangulum S μ q, æquale est triangulo C S c. Istud autem ubique obtinet in triangulis minimis trilinea A S C μ, S μ Q constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia A S C μ, S μ Q ac proinde triangulum S μ Q, æquale est parabolicæ, A S C μ.

(h) * *Ideóque.* Quoniam recta S μ, cum tangente in μ, et chordâ A C, æquales constituit angulos (Lem. IV. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente et rectâ



S μ, erit ad spatium contentum sub chordâ A C, et rectâ S M, ut area A S C μ, ad triangulum A S C, id est, ut triangulum S A C + segm. parab. C A c ad triangulum S A C, id est, ut triangulum S A C + $\frac{2}{3}$ parallelogrammi A G F C, ad triangulum A S C, hoc est, ut A C $\times$ $\frac{1}{2}$ S M + A C $\times$ $\frac{2}{3}$ I μ ad A C $\times$ $\frac{1}{2}$ S M, sivè ut S M + $\frac{4}{3}$ I μ ad S M. Sed μ N, sumpta est gulum A S C, id est, ut S N ad S M. Quare A C est ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine S P sit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine S μ, in subduplicatâ ratione S P ad S μ inversè, id est, in ratione S μ ad S N; ([i]) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut S μ ad S N. Igitur A C et longitudo hâc novâ velocitate descripta, cùm sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. Q. e. d.

([k]) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S μ + $\frac{2}{3}$ I μ, eodem tempore describeret chordam A C quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine S N *seu* S μ + $\frac{1}{3}$ I μ *demitteretur, ut caderet in Solem, et eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum* A C, *descensu suo describeret spatium longitudini* I μ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum A C, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S P (per Lemma novissimum) describet chordam A C, ideóque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus semi-diameter esset S P, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcûs parabolici chordam A C, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in Solem in altitudine S P, cadendo de altitudine illâ in Solem, describeret semisse temporis illius (([l]) per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis S P, id est, spatium $\frac{\text{A I q}}{4\ \text{S}\ \mu}$. ([m]) Unde cùm pondus cometæ in Solem in altitudine

æqualis $\frac{1}{3}$ I μ, et est M μ = μ I (num. 139.). Quarè M N = $\frac{4}{3}$ I μ. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente et rectâ S μ, ad spatium contentum sub chordâ A C, et rectâ S M, ut S M + M N ad S M, hoc est, ut S N ad S M: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit L $\times$ S μ : A C $\times$ S M = S N : S M, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam A C, ut $\frac{\text{S N}}{\text{S}\ \mu}$ ad $\frac{\text{S M}}{\text{S M}}$, hoc est, ut S N ad S μ.

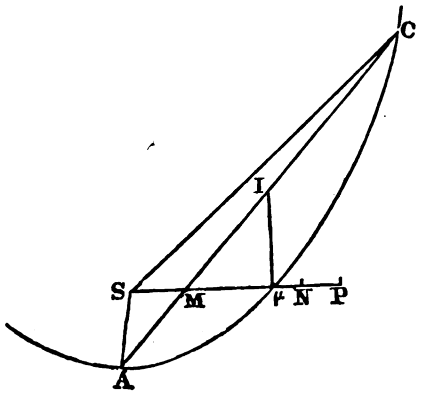
([i]) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ sunt ut velocitates (5. Lib. I.).

([k]) * *Corol.* Si S μ, sit admodum magna respectu μ N, tres geometricè proportionales S μ, S N, S P, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est N P, æquabitur μ N, sive trienti ipsius I μ, ideóque μ P, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius I μ. Quarè patet Corollarium.

([l]) * *Per Corol.* 9. *Prop. IV. Lib. I.* Vel per num. 201. ejusdem Lib.

([m]) * *Undè cùm pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ

S N sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine S P, ut S P ad S μ: cometa pondere quod habet in altitudine S N eodem tempore, in Solem



cadendo, describet spatium $\frac{\mathrm{A\,I\,q}}{4\,\mathrm{S}\,\mu}$, (n) id est, spatium longitudini I μ vel M μ æquale. Q. e. d.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo, quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes (o) æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, et inde aberret versus I potius quàm versus A. (p) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per Lemma sextum.

Designet S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, T A, t B, τ C observatas tres longitudines cometæ, V tempus inter observationem

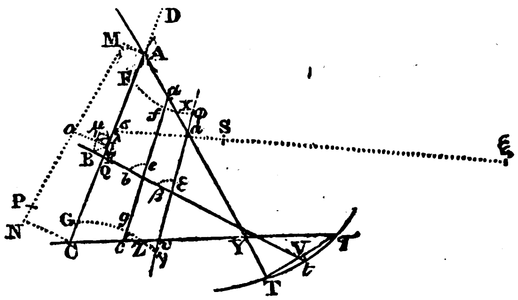
S N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantiâ S P, ut S P² ad S N², hoc est, ob proportionales S P, S N, S μ, ut S P ad S μ.

(n) * *Id est.* (Lem. IX.)

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138.

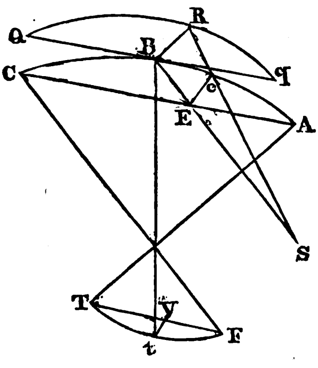
(p) * *Si tales observationes.* (Ibid.)

primam et secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri Telluris a Sole distantiâ, describere posset; quæque (per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III.) invenienda est, et t V perpendiculum in chordam T τ. In observatâ longitudine mediâ t B sumatur utcunque



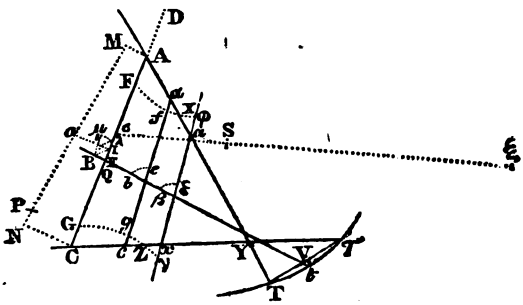
punctum B pro loco cometæ in plano eclipticæ, et inde versus Solem S ducatur linea B E, quæ sit ad sagittam t V, ut contentum sub S B et S t quad. ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt S B (q) et tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium t B. Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta A E C, cujus partes A E, E C, ad rectas T A et C τ terminatæ, sint ad invicem ut tempora V et W: (r) et erunt A et C loca cometæ in plano eclipticæ in

(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum eclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto t B pro radio.



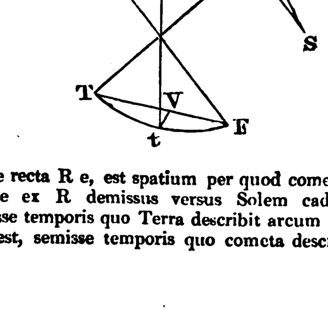
(r) * *Et erunt A et C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp.) B est vestigium cometæ in plano eclipticæ, et B R ad planum eclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium t B, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque R S distantiam cometæ a Sole in observatione secundâ. Per E, agatur E e, ad B R, parallela quæ (per Prop. VIII. Lib. XI. Elem.) normalis est ad planum eclipticæ, jacetque in plano trianguli S B R, occurrat hæc ipsi S R in e. Jam verò recta R e, est ad rectam t V, in ratione compositâ ex R e, ad B E, et B E ad t V. Sed (per Prop. XI. Lib. VI. Elem.) R e est ad B E ut R S ad B S et B E est ad t V, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quarè E e est ad t V, in ratione compositâ ex ratione S R ad B S, et ratione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ S B; ratio autem quæ ex istis binis componitur eadem est cum ratione St^2 ad SR^2, hinc R e est ad B E, ut St^2 ad SB^2. Quia verò t V est æqualis quamproximè quadrato arcûs T t per diametrum orbis magni diviso (182. Lib. I.) erit recta t V, quamproximè spatium per quod Terra e quiete demissa vi suæ gravitatis caderet versus Solem, dum semissem arcûs T t, describet, si eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. Lib. I.) Prætereà gravitas acceleratrix versus Solem in loco t, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco R, observatione primâ ac tertiâ quamproximè, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

Ad A C bisectam in I erige perpendiculum I i. Per punctum B age occultam B i ipsi A C parallelam. Junge occultam S i secantem A C in λ, et comple parallelogrammum i I λ μ. Cape I σ æqualem 3 I λ, et per Solem S age occultam σ ξ æqualem 3 S σ + 3 i λ. Et deletis jam literis



A, E, C, I, a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam B E, quæ sit ad priorem B E in duplicata ratione distantiæ B S ad quantitatem S μ + $\frac{1}{3}$ i λ. Et per punctum E iterum duc rectam A E C eâdem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes A E et E C sint ad invicem, ut tempora inter observationes V et W. Et erunt A et C loca cometæ (*) magis accuratè.

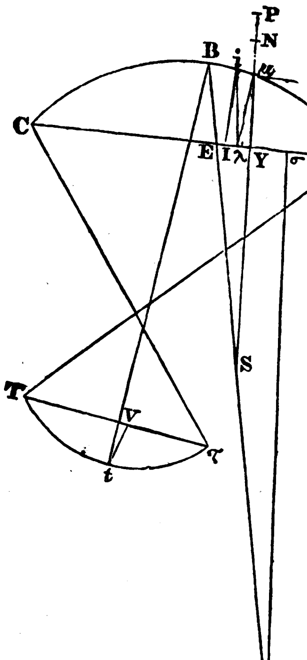
ut S R ^{2} ad S t ^{2}, et spatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorsum versus Solem, descripta, sunt inter se ut vires (Lem. X. Lib. I.);



quare recta R e, est spatium per quod cometa e quiete ex R demissus versus Solem caderet semisse temporis quo Terra describit arcum T t, hoc est, semisse temporis quo cometa describit trajectoriæ suæ arcum interceptum inter duas longitudines T A, T C, ideóque punctum R, est in arcûs istius chordâ. Unde si tam arcus trajectoriæ Q R q binis longitudinibus T A, T C terminati quàm puncti e, concipiantur vestigia normalibus ad planum eclipticæ demissis signata, nempè A, B, C et E, erit punctum E in chordâ arcûs A B C. Sed chorda arcûs A B C dividitur a rectâ S B ferè in ratione temporum quibus cometa ad eclipticam reductus, describit arcus A B, B C, (165.) et (per constr.) in eâdem ratione dividitur recta A C, nullaque alia hisce conditionibus potest satisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, a rectis T A, T C terminari et per E transire et in E dividi in ratione temporum, cùmque recta A C hasce conditiones sola et unica obtineat, evidens est rectam A C esse chordam prædicti arcûs, ac proindè puncta A et C sunt quamproximè vestigia cometæ in plano eclipticæ in observationibus primâ et tertiâ, si modò B sit locus ejus rectè assumptus in observatione secundâ.

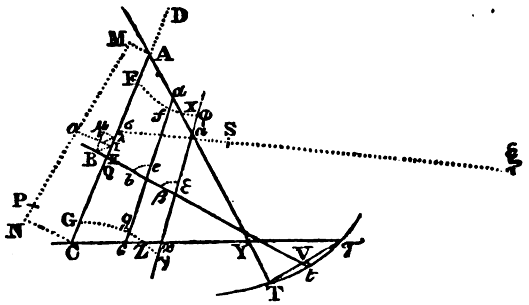
(*) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, et licet accuratè sumptus fuisset, Ad A C bisectam in I erigantur perpendicula A M, C N, I O, quorum A M et C N sint tangentes latitudinum in observatione primâ ac tertiâ ad radios T A et τ C. Jungatur M N secans I O in O. Constituatur rectangulum i I λ α ut prius. In I A productâ capiatur I D æqualis

tamen loca A et C, indè deducta non sunt satis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente constructione Newtonianâ, concipiantur demissa a singulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum eclipticæ, prædictis perpendiculis in plano eclipticæ, signabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehensi chorda est quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.) Jam verò in



prædicto arcu sumptum est punctum B, non procul a vertice segmenti A B C, nam capta sunt tria observationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem distantia, ita tamen ut tempus sit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta est recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ a puncto I ad rectam C A, junctaque est secans S i, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò respectu immensæ Solis distantiæ, evanescit distantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex segmenti A B C. Jungatur μ S, secans chordam A C in Y, erit μ Y, fere parallela i λ, ob immensam puncti S distantiam, ideóque λ Y, æqualis rectæ i μ, ac proindè et ipsi I λ. Sed (ex constr.) I σ sumpta est tripla ipsius I λ, quarè est etiam tripla ipsius λ Y et reliquæ Y σ, ideóque juncta σ S, (165.) ea ipsa est recta σ S, quæ exhibetur in Lem. VIII. id est, in rectâ σ S, producta versus S, reperitur punctum ξ, a quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A secans, chordam secat in segmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus respondentes arcus a cometâ describuntur. Sed (ex constr.) $\sigma\,\xi = 3\ S\,\sigma + 3\ i\,\lambda$ et $i\,\lambda = I\,\mu$, sunt enim rectæ i λ, I μ diametri ejusdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\,\xi = 3\,\sigma\,S + 3\ I\,\mu$. Quarè (140.) punctum ξ, suprà inventum, illud est ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, a cometâ describuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confusionem, priore B E versus S ductâ, acta est nova versus ξ, quæ est ad priorem ut quadratum ipsius S B, ad quadratum ipsius $S\,\mu + \frac{1}{3}\,i\,\lambda$, hoc est propter æquales i λ, I μ ad quadratum ipsius $S\,\mu + \frac{1}{3}\,I\,\mu$, et S B est quamproximè æqualis ipsi S μ. Quarè nova B E, est ad priorem B E, ut $S\,\mu^2$, ad $S\,N^2$, positâ μ N triente ipsius I μ, sive i λ, ut in constr. Lem. X. Deinde gravitas acceleratrix versus Solem in loco N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco B, vel μ, ut $S\,B^2$ vel $S\,\mu^2$ ad $S\,N^2$. Præterea gravitates acceleratrices versus Solem in distantiis diversis, manentibus dictis viribus, sunt ut spatia eodem tempore versus Solem cadendo descripta; est igitur nova B E, ad priorem B E, ut spatium versus Solem cadendo percursum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, semisse temporis quo cometa describit arcum longitudinibus T A, T C, comprehensum, ad spatium eodem tempore versus Solem cadendo descriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales sunt hujus analogiæ consequentes, quare æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur spatio a grave cadente versus Solem percurso, semisse temporis quo cometa arcum A B C, in eclipticâ describit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in distantiâ S N, a Sole obtinet. At (Lem. XI.) spatium per quod corpus decidit versus Solem semisse temporis quo cometa describit arcum A B C, cùm urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N obtinet, æquale est rectæ μ Y, seg-

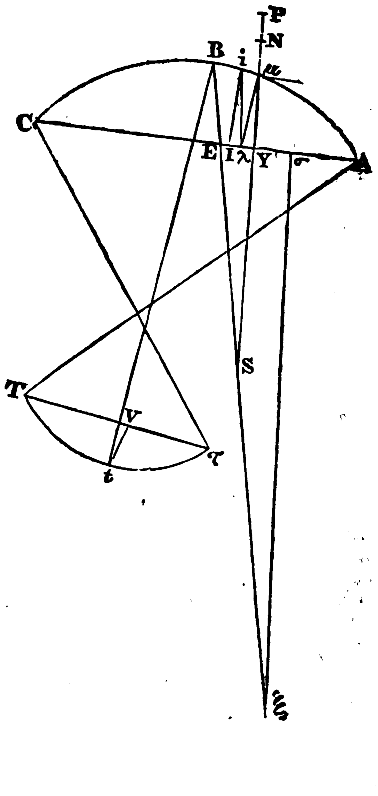
$S\mu + \xi i \lambda$. Deinde in M N versus N capiatur M P, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ



Telluris a Sole (seu semi-diametri orbis magni) ad distantiam O D. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet.

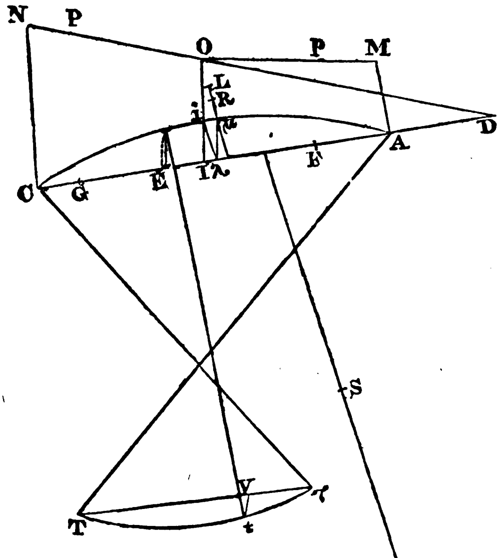
mento ipsius μ S, inter verticem μ et chordam A C intercepto, ac proinde æquatur quamproximè ipsi B E segmento rectæ B ξ, inter punctum B ipsi μ proximum et chordam A C comprehenso. Unde punctum E est in chordâ A C magis accurate quàm anteà, hoc est, chorda arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano eclipticæ, inter longitudines T A, T C interceptæ, per punctum E ultimò inventum transit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter T A, T C, ità locari debet ut A E sit ad E C, sicut tempus quo cometa describit eclipticæ arcum inter longitudines T A et t B, ad tempus quo arcum inter t B et T C describit (Lem. VIII.) sed A C ità (per Lem. VIII.) acta est per E, ut A E sit ad E C in eâdem illâ ratione, nempe sicut tempus inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam. Rectè igitur acta est A C, per E scilicet transiens et divisa in E ut oportebat, ac proinde si modò punctum B, rectè fuerit assumptum pro cometæ vestigio in observatione secundâ, puncta A, C sunt ejusdem vestigia quamproximè in observationibus primâ et tertiâ.

(t) * *Erunt A, B, C.* Superest jam ut dignoscatur an punctum B in mediâ longitudine rectè fuerit assumptum cometæ vestigium, ut error hinc ortus, si quis fuerit, corrigatur, reliquis, quæ hactenus facta sunt, manentibus. Deleto priore parallelogrammo i I λ μ, ad priorem minusque accuratam chordam C A constituto, describatur alterum ad posteriorem et accuratiorem chordam C A; eâdem adhibitâ constructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad C A normales A M, I O, C N, sitque A M tangens notæ latitudinis in observatione primâ ad radium T A, et C N tan-



(u) Sin punctum P non incidat in punctum N, in rectâ A C capiatur C G ipsi N P æqualis, ita ut puncta G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant.

gens latitudinis in observatione tertiâ ad radium T C; jungatur M N secans I O in O. Si erigatur trapezium A C N M normaliter ad planum eclipticæ manente rectâ C A, erunt puncta M, N loca vera cometæ, si modò punctum B sit ejus vestigium in plano eclipticæ in observatione secundâ, et planum transiens per tria puncta M, O, N, est planum trajectoriæ cometicæ, ideóque recta M N est chorda arcûs trajectoriæ parabolicæ a cometâ descriptæ inter observationem primam et tertiam, et S M, S N sunt distantiæ cometæ a Sole in observatione primâ et tertiâ respective, hoc est, distantia vera cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ a Sole est hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia a Sole vestigii illius puncti in plano eclipticæ, alterum autem est perpendiculum ex isto vestigio normaliter ad planum eclipticæ excitatum et ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex istis perpendiculis sunt longiora ut N C, quædam breviora ut M A, inter hæc medium quoddam usurpetur, putà hic I O. Et universaliter loquendo, distantia cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ a Sole erit quamproximè hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia puncti analogi in vestigio trajectoriæ descripto, et alterum latus est ipsa recta I O. Quibus positis in I A, eâve productâ capiatur I D $=$ S $\mu + \frac{2}{3}$ i $\lambda =$ S R, factâ L R $=$ L μ, et jungatur D O, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ est vestigium distantiæ a Sole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum istud et chordam arcûs trajectoriæ, ipsam scilicet M N in trapezio A C N M, id est, recta D O æqualis est rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipsi S R in ejus vestigio in plano eclipticæ, hoc est D O æqualis est rectæ S R in parabolâ (Lem. X.). Jam (per Corol. 3. Prop. XL.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ suâ trajectoriâ movetur in distantiâ a Sole æquali rectæ D O, cum velocitate Telluris circà Solem, et definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo Tellus arcum τ t T describit, sive toto tempore quo cometa arcum A B C in eclipticâ percurrit, in partibus arcûs T t τ a Tellure interim percursi. Id autem facile præstatur modo sequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs τ t T a Tellure descripti inter observationem primam et tertiam, posito quovis numero rotundo pro mediocri distantiâ Terræ a Sole, longitudo putà M P quæ est ad longitudinem priùs inventam X, in subduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam D O, quæque proindè datur, est ipsa longitudo quæsita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam suam parabolicam describens habet ad distantiam a Sole æqualem rectæ D O, percurreret tempore quo cometa arcum cujus chorda M N reverâ percurrit. Nam (per Cor. 3. Prop. XL.) velocitas cometæ in hâc distantiâ D O, est ad velocitatem Telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo M P æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore reverâ describit; quarè si reperiatur M P æqualis chordæ M N, hoc est, si punctum P incidat in punctum N reetè assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observat pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet.

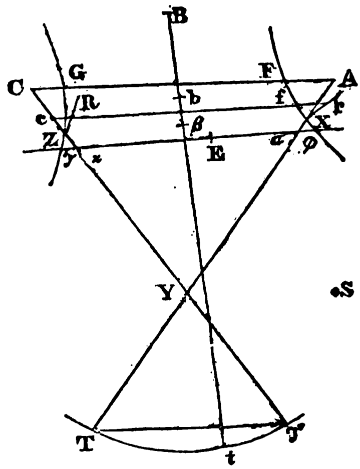


(u) * *Sin punctum P non incidat in punctum N*, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiantur M P, N P æquales longitudini priùs inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, itâ ut G et P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa

Eadem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis b et β puncta nova e, a, c, g et ι, α, $\varkappa$, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli G g γ, secans rectam τ C in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in A C, a c, α $\varkappa$ capiantur A F, a f, α φ ipsis C G, c g, $\varkappa$ γ respectivè æquales, et per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli F f φ, secans rectam A T in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X et Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios T X et τ Z, et habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur parabola, et hæc erit trajectoria cometæ. Q. e. i.

(x) Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur; quippe cùm recta A C secetur in E in ratione temporum, per Lemma

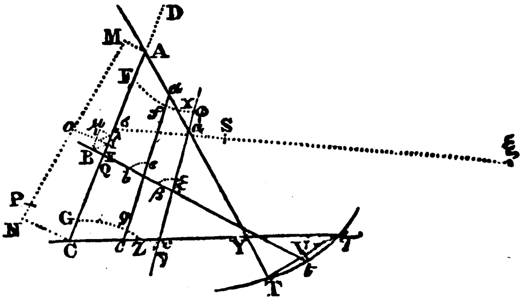
sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b et β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, et ι, α, $\varkappa$, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quàm M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ et A T concurrunt, et ità porrò, ità ut saltem α γ, minor fiat quàm α $\varkappa$. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui



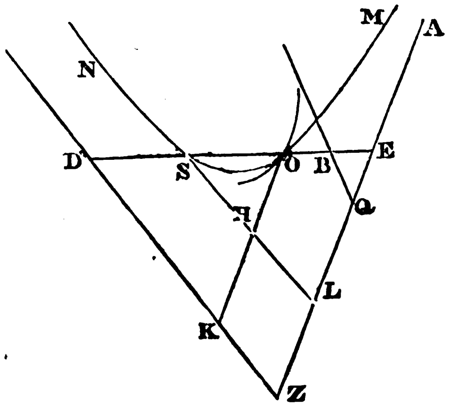
rectam τ C, secabit inter G et $\varkappa$, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ et tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, et b, item in α, $\varkappa$, et β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observatione secundâ si puncta N, P, coincidant, itemque A et F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τ C, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τ C, quàm in loco punctorum G, nempe circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verùm cometæ vestigium in plano eclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quarè si ex puncto Z, ad planum eclipticæ excitata intelligatur normalis Z R æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum eclipticæ erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, et umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. Prop. XIX. Lib. I.) ex eodem umbilico S, et binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet.

(x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

VII. ut oportet per Lem. VIII.: et B E per Lem. XI. sit pars rectæ B S vel B ξ in plano eclipticæ arcui A B C et chordæ A E C interjecta;

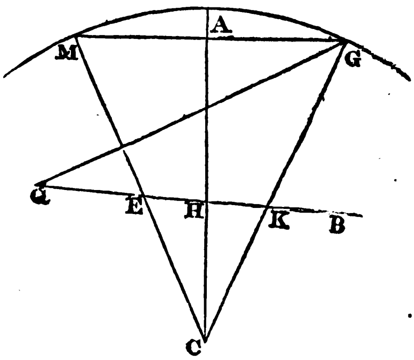


et M P (per Corol. Lem. X.) longitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet,



143. *Lemma*. Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item sit curva M O N, talis ut per S ductâ quâvis rectâ S E sit B E, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ S O, erit curva M O N, hyperbola. Nam ducatur S L, ad B Q, parallela, occurrensque ipsi A Q in L; in rectâ Q L productâ capiatur L Z = L Q, agaturque Z D ad Q B parallela, itemque ducatur O K parallela ad Q Z: ob S O = B E (per hyp.) erit H O = Q E. Quarè cùm sit S H : H O = S L : L E = S L − S H : L E − H O = L H : L Q = L H : H K, erit S H × H K = H O × L H, hoc est. S L × H K − L H × H K = K O × L H − H K × L H. Unde erit S L × H K = K O × L H, vel Z L × L S = Z K × K O, ideóque curva M O N, est hyperbola cujus asymptoti Z A, Z S (Lem. I. de con.).

144. *Corol.* Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ B E, lateribus anguli dati E Q B, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ M O N, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, et producatur S O E, erit B E æqualis rectæ datæ S O (143).

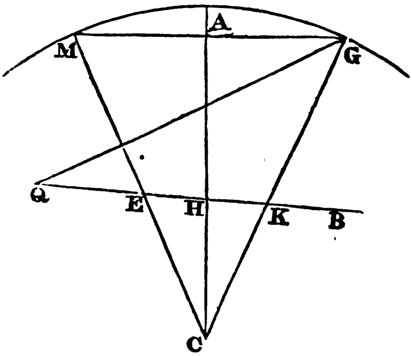


145. Newtonus in arithmeticâ universali, præcedentis Corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ sectiones conicas adhibet. Quarè veterum constructionem utpotè simpliciorem hic quoque subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta Q B, ad quam erigatur normalis A H, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ

ideóque ipsi M N æqualis fuerit, si modò B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

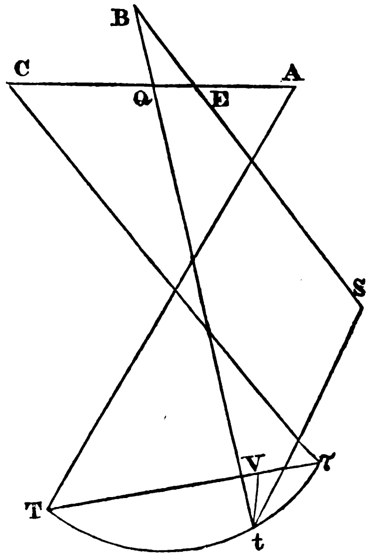
Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima (γ) eligere convenit. Si angulus A Q t, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam t B, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta A C, quæ sit ad $\frac{4}{3}$ T τ in subduplicatâ ratione S Q ad S t. Et agendo rectam S E B, cujus pars E B æquetur longi-

quotcumque C M, rectam Q B secantes in E, ut semper sit E M æqualis rectæ datæ A H, curva in quâ sunt puncta M, A, dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli G Q B,



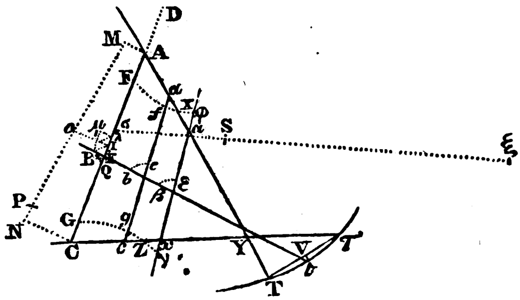
ducere oporteat rectam G K, quæ transeat per punctum datum C, et æqualis sit rectæ datæ C K, puncto C tanquam polo et intervallo dato A H = C K describatur conchois quæ occurrat rectæ C G, in G patet fore K G æqualem rectæ datæ C K. Q. e. f.

(γ) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ Terram et cometam in observatione secundâ conjungente, sive huic æqualis angulus A Q t (Lem. IV. de con.) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis positione datis T A, T C utrinque comprehensa, rectamque t B, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times$ T t, hoc est, proximè ad $\frac{4}{3}$ T t, in subduplicatâ ratione S t ad S Q, et agatur per S, recta S E B, talis ut pars E B a cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis sit rectæ t V (144. 145.) punctum B, ità definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano eclipticæ. Ponatur B, esse vestigium cometæ in plano eclipticæ et arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcûs trajectoriæ inter observationem primam et tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod gravitas acceleratrix versùs Solem eâdem sit in distantiâ Telluris a Sole, atquè in distantiâ cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate, a verâ non multum distans, æquales



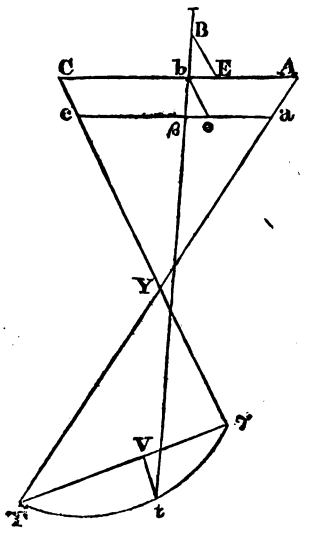
erunt B E, t V, utpotè spatia cadendo versùs Solem eodem tempore percursa a cometâ et a Tellure, ac proindè erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times$ T t chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ S t, ad rectam S E, (Cor. 7. Prop. XVI. Lib. I.) Sed sumpta est A C ad $\sqrt{2} \times$ T t in subduplicatâ ratione S t ad S Q, et A C secat rectam t B in angulo A Q t, sicut oportebat, atque B E æqualis est ipsi t V; quarè recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcûs qui est vestigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, et tertiam interceptæ, ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut sit proximè vestigium cometæ in observatione secundâ. Rectè igitur determinatum est punctum B, quod primâ vice usurpare licet.

tudini V t, determinabitur punctum B quod primâ vice usurpare licet. ([z]) Tum rectâ A C deletâ et secundùm præcedentem constructionem



iterum ductâ, et inventâ insuper longitudine M P; in t B capiatur punctum b, e lege, ut si T A, τ C se mutuò secuerint in Y, sit distantia Y b ad distantiam Y B, in ratione compositâ ex ratione M P ad M N et ratione subduplicatâ S B ad S b. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium β si modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia B b

([z]) * *Tum rectâ A C, deletâ.* Determinato puncto B, quòd primâ vice licet usurpare, cætera, quæ deinceps assumuntur puncta nempè b, β, aliam constructionem postulant. Nec satis est quod punctum b, sumatur propius puncto Y, dum linea M P, minor est quàm A C vel M N (in fig. Newt.) et contrà. Sed quia ducere oportet rectam A C, quæ sit æqualis longitudini M P, capiatur in t B, punctum b, eâ lege ut sit distantia Y b, ad distantiam Y B, in ratione compositâ ex ratione M P ad A C, et ratione subduplicatâ S B ad S b. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cùm enim invenienda sit A C, quæ sit longitudini M P æqualis, si illa hâc sit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per solam priorem rationem si M P foret constans. Quia verò variante A C, perpetuò quoque variabilis est recta M P, ideò adhibenda est altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, et a, b, c, descriptis, chordæ arcuum A B C, a b c, in quibus æquales sunt rectæ B E, b e, ad umbilicum S tendentes inter verticem et chordam interceptæ, sunt in ratione subduplicatâ rectarum S B, S b (ut colligitur ex Theor. I. et II. de parab.). Prætereà (ex dem.) æquales sunt rectæ B E, b e quamproximè; sunt enim. spatia a cometâ versus Solem cadendo in diversis ab illo distantiis eodem tempore percursa, et vestigium cometæ in observatione secundâ proximum est vertici arcûs A B C, seu vestigii portionis trajectoriæ a cometâ inter observationem

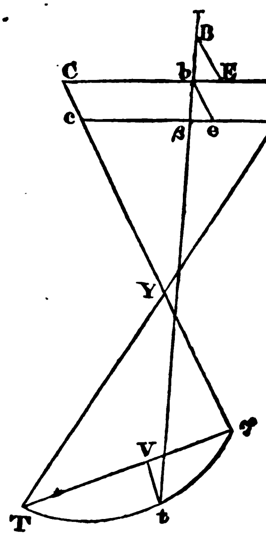


primam et tertiam descriptæ. Quarè habetur punctum b, cometæ vestigium in plano eclipticæ, non tamen accuratum, sed vero proximum duntaxat.

perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f et G, g, actæ rectæ F f et G g secabunt T A et τ C (*) in punctis quæsitis X et Z.

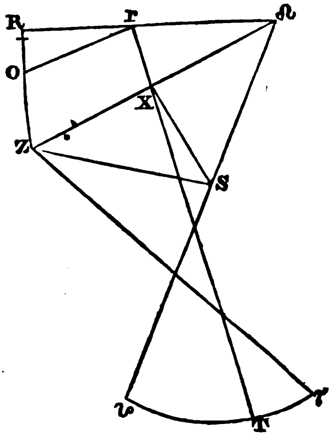
(*) * *In punctis quæsitis X et Z.* (Ut patet ex notâ (u), in hanc Prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè observationibus satisfacere deprehendatur, ea sic poterit describi. Reperiatur vestigium cometæ in plano eclipticæ in observatione secundâ, eundem ordinem situmque obtinet vestigium illud



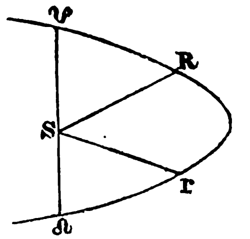
inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, κ, vel X, inter A, a, α. Ex vestigio sic invento, ad planum eclipticæ erigatur normalis quæ est tangens latitudinis in observatione secundâ ad radium æqualem distantiæ inter locum t, dictumque vestigium. Hujus perpendiculi extremum punctum signabit locum cometæ in orbitâ propriâ secundò observatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, et punctum modò inventum describatur ellipsis (Prop. XX. Lib. I.), hæc erit quæsita cometæ trajectoria.

147. Ex præcedentis Problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ et tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, et per easdem litteras designatis ut suprà, producuntur rectæ Z X, R r, donec concurrant in ☊, junganturque S Z, S X, S ☊ jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli S Z X, tam latera quàm anguli, ac proinde innotescit etiam angulus S X ☊. Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triangula R O r et r X ☊, æquiangula, ideóque cùm ex notis lateribus O r = Z X, et O R, differentiâ notarum rectarum R Z et r X unà cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera et anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X ☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò et reliqua nempè X ☊ et r ☊. Deindè in triangulo ☊ X S, nota sunt latera X S, X ☊, cum angulo inter-



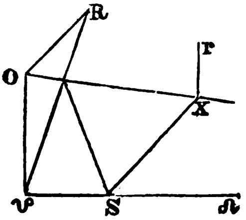
cepto S X ☊, innotescet itaque angulus X S ☊. Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sivè angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X et angulus X T S, distantia inter locum Solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proindè et positio rectæ ☊ S ☋, hoc est, dabuntur loca nodorum e Sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideóque positione cognita.

Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectoria cometæ (per

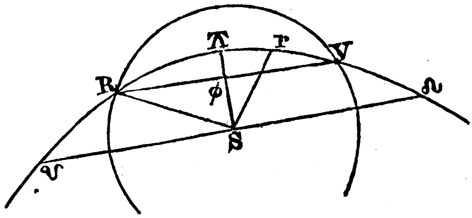


Prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊ S ☋, trajectoriæ in ☊ et ☋ occurrens, erit (Prop. I. Lib. I.) intervallum temporis inter observationem primam et momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam et tertiam ut area r ☊ S, ad aream R S r; sed arearum r ☊ S, R S r, nota est ratio (per Theor. IV. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ☋ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ. Ex puncto O ad ☋ S ☊, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☋, jungaturque R ☊. In triangulo O S ☋, præter rectum ad ☋, dantur (147.) angulus O S ☋ et latus O S, quare datur O ☋. Deinde in triangulo R O ☋, dantur latera circà rectum O R et O ☋, ideóque notus



erit angulus O ☋ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ.



149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quem ex puncto S demittatur perpendicularis S ϕ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in ϖ, erit ϖ trajectoriæ perihelium; et proindè recta ipsius S ϖ quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cùm enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus, ac proinde axi normalis, erit R V intersectiones conjungens; quarè S ϕ est axis et ϖ vertex parabolæ, sivè trajectoriæ perihelium et quadrupla S ϖ parameter diametri cujus ϖ est vertex (Theor. II. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam et tertiam ut area r S ϖ ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cùm enim detur tempus inter observationem primam et tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, a cometâ radio ad Solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca Telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter Telluris orbitam et cometæ trajectoriam. Unde innotescet tempus quo cometa est Terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a Flamstedio observatum et ex observationibus computatum, atque ab Halleio ex iisdem observationibus correctum, tabula sequens exhibet.

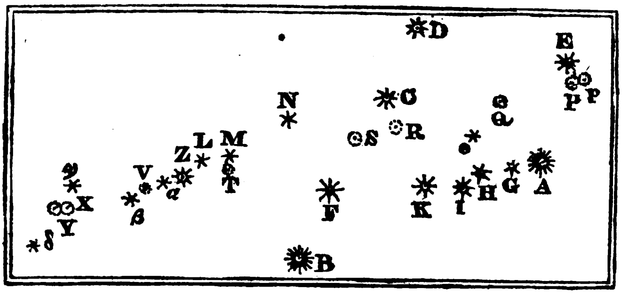
	Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4. 46	4. 56. 0	♑ 1. 51. 23	♑ 6. 32. 30	8. 28. 0
21	6. 32½	6. 36. 59	11. 6. 44	♒ 5. 8. 12	21. 42. 13
24	6. 12	6. 17. 52	14. 9. 26	18. 49. 23	25. 23. 5
26	5. 14	5. 20. 44	16. 9. 22	28. 24. 13	27. 0. 52
29	7. 55	8. 3. 2	19. 19. 43	♓ 13. 10. 41	28. 9. 58
30	8. 2	8. 10. 26	20. 21. 9	17. 38. 20	28. 11. 53
1681. *Jan.* 5	5. 51	6. 1. 38	26. 22. 18	♈ 8. 48. 53	26. 15. 7
9	6. 49	7. 0. 53	♒ 0. 29. 2	18. 44. 4	24. 11. 56
10	5. 54	6. 6. 10	1. 27. 43	20. 40. 50	23. 43. 52
13	6. 56	7. 8. 55	4. 33. 20	25. 59. 48	22. 17. 28
25	7. 44	7. 58. 42	16. 45. 36	♉ 9. 35. 0	17. 56. 30
30	8. 7	8. 21. 53	21. 49. 58	13. 19. 51	16. 42. 18
Feb. 2	6. 20	6. 34. 51	24. 46. 59	15. 13. 53	16. 4. 1
5	6. 50	7. 4. 41	27. 49. 51	16. 59. 6	15. 27. 3

His adde observationes quasdam e nostris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h. 30′	♉ 26°. 18′. 35″	12°. 46′. 46″
27	8. 15	27. 4. 30	12. 36. 12
Mar. 1	11. 0	27. 52. 42	12. 23. 40
2	8. 0	28. 12. 48	12. 19. 38
5	11. 30	29. 18. 0	12. 3. 16
7	9. 30	♊ 0. 4. 0	11. 57. 0
9	8. 30	0. 43. 4	11. 45. 52

Hæ observationes telescopio septupedali, et micrometro filisque in foco telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis et positiones fixarum inter se et positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet A stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (Bayero o) B stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (Bayero ζ) et C stellam sextæ magnitudinis (Bayero n) in talo ejusdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede.

Sintque p, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in observationibus infra descriptis: et existente distantiâ A B partium $80\frac{7}{12}$, erat A C partium $52\frac{1}{4}$, B C $58\frac{5}{6}$, A D $57\frac{5}{12}$, B D $82\frac{6}{11}$, C D $23\frac{2}{3}$, A E $29\frac{4}{7}$, C E $57\frac{1}{2}$, D E $49\frac{11}{12}$, A I $27\frac{7}{12}$, B I $52\frac{1}{6}$, C I $36\frac{7}{12}$, D I $53\frac{5}{11}$, A K $38\frac{2}{3}$, B K 43,



C K $31\frac{5}{9}$, F K 29, F B 23, F C $36\frac{1}{4}$, A H $18\frac{6}{7}$, D H $50\frac{7}{8}$, B N $46\frac{5}{12}$, C N $31\frac{1}{3}$, B L $45\frac{1}{12}$, N L $31\frac{5}{7}$. H O erat ad H I ut 7 ad 6 et producta transibat inter stellas D et E, sic ut distantia stellæ D ab hâc rectâ esset $\frac{1}{6}$ C D. L M erat ad L N ut 2 ad 9, et producta transibat per stellam H. His determinabantur positiones fixarum inter se.

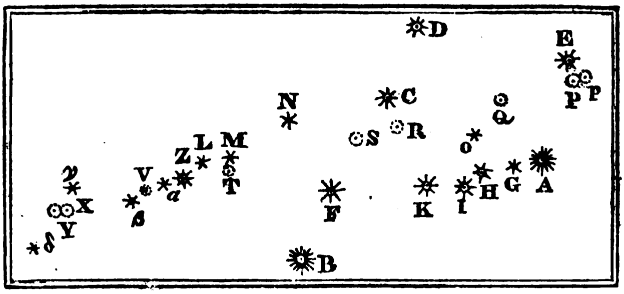
Tandem Poundius noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, et earum longitudines et latitudines in tabulam sequentem retulit.

Fixarum.	Longitudines.				Lat. boreæ.		
		°	′	″	°	′	″
A	♉	26.	41.	50	12.	8.	3
B		28.	40.	23	11.	17.	54
C		27.	58.	30	12.	40.	25
E		26.	27.	17	12.	52.	7
F		28.	28.	37	11.	52.	22
G		26.	56.	8	12.	4.	58
H		27.	11.	45	12.	2.	1
I		27.	25.	2	11.	53.	11
K		27.	42.	7	11.	53.	26
L		29.	33.	34	12.	7.	48
M		29.	18.	54	12.	7.	20
N		28.	48.	29	12.	31.	9
Z		29.	44.	48	11.	57.	13
α		29.	52.	3	11.	55.	48
β	♊	0.	8.	23	11.	48.	56
γ		0.	40.	10	11.	55.	18
δ		1.	3.	20	11.	30.	42

Positiones verò cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die Veneris Feb. 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p existentis distantia a stellâ E erat minor quàm $\frac{5}{13}$ A E, major quàm $\frac{1}{3}$ A E, ideóque æqualis $\frac{5}{14}$ A E proxime: et angulus A p E nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad p E perpendiculum ab A, distantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{3}$ p E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P existentis distantia a stellâ E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ A E, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ A E, ideóque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ A E, seu $\frac{8}{39}$ A E quamproximè. A perpendiculo autem a stellâ A ad rectam P E demisso distantia cometæ erat $\frac{2}{3}$ P E.



Die Solis Feb. 27. hor. $8\frac{1}{4}$, p. m. cometæ in Q existentis distantia a stellâ O æquabat distantiam stellarum O et H, et recta Q O producta transibat inter stellas K et B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die Martis Mart. 1. hor. 11. p. m. cometa in R existens, stellis K et C accuratè interjacebat, et rectæ C R K pars C R paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ C K, et paulo minor quàm $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{8}$ C R, ideóque æqualis $\frac{1}{3}$ C K + $\frac{1}{16}$ C R seu $\frac{16}{45}$ C K.

Die Mercurii Mart. 2. hor. 8. p. m. cometæ existentis in S distantia a stellâ C erat $\frac{4}{9}$ F C quamproximè. Distantia stellæ F a rectâ C S producta erat $\frac{1}{24}$ F C; et distantia stellæ B ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quàm distantia stellæ F. Item recta N S producta transibat inter stellas H et I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quàm stellæ I.

Die Saturni Mart. 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in T, recta M T æqualis erat $\frac{1}{2}$ M L, et recta L T producta transibat inter B et F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens a B F quintam vel sextam ejus partem versus F. Et M T producta transibat extra spatium B F ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quàm stellæ F.

Erat M stella perexigua quæ per telescopium videri vix potuit, et L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Die Lunæ Mart. 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in V, recta V α producta transibat inter B et F, auferens a B F versus F $\frac{1}{10}$ B F, et erat ad rectam V β ut 5 ad 4. Et distantia cometæ a rectâ $\alpha\,\beta$ erat $\frac{1}{2}$ V β.

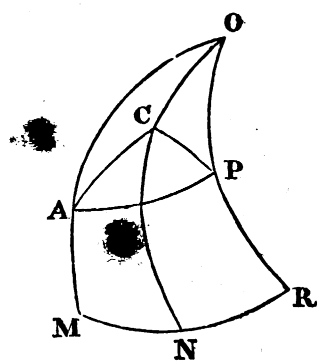
Die Mercurii Mart. 9. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. cometâ existente in X, recta γ X æqualis erat $\frac{1}{4}\,\gamma\,\delta$, et perpendiculum demissum a stellâ δ ad rectam γ X erat $\frac{2}{5}\,\gamma\,\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometâ existente in Y, recta γ Y æqualis erat $\frac{1}{3}\,\gamma\,\delta$, aut paulo minor, putà $\frac{5}{16}\,\gamma\,\delta$, et perpendiculum demissum a stellâ δ ad rectam γ Y æqualis erat $\frac{1}{6}\,\gamma\,\delta$ vel $\frac{1}{7}\,\gamma\,\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum et computationes derivabam (a) longitudines et latitudines cometæ, et Poundius noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, et loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen et latitudinum errores (quatenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motûs sui notabiliter deflectere cœpit boream versùs, a parallelo quem in fine mensis Februarii tenuerat.

(a) 149. * *Longitudines et latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ a duabus fixis quarum longitudines et latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo et latitudo ad tempus observationis. Referat M R, portionem eclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines et latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia a duabus stellis A, P nota sit. In triangulo A O P, ex datis A O, P O complementis latitudinum stellarum et angulo A O P cujus mensura est arcus M R differentia longitudinum, dabitur A P distantia stellarum, atque innotescet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde invenietur angulus C P A, quo subtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quarè dabitur angulus P O C cujus mensura est arcus N R, differentia scilicet longitudinum stellæ P et cometæ C. Item innotescet arcus O C, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ a duabus fixis quarum ascensiones rectæ et declinationes notæ sunt, indè colligentur ascensio recta et declinatio cometæ.

150. Datis declinatione et ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio et ascensio recta cometæ, modò tamen stella et cometa transire vicissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis et ascensionis rectæ inter fixam et cometam (39. Lib. III.) et



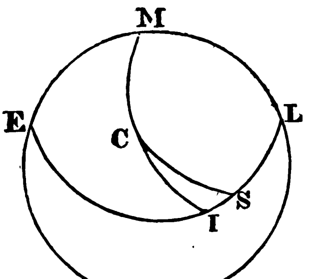
hinc dabuntur cometæ longitudo et latitudo (17. Lib. III.).

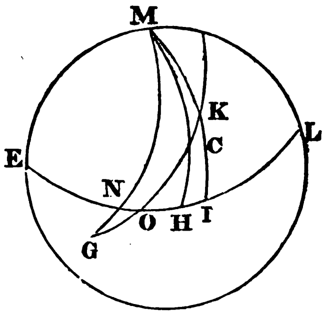
151. Datis cometæ longitudine et latitudine, simulque notâ longitudine Solis, datur distantia

Jam ad orbem cometæ determinandum, selegi ex observationibus hactenus descriptis, tres quas Flamstedius habuit Dec. 21. Jan. 5. et Jan. 25. (b) Ex his inveni S t partium 9842.1 et V t partium 455, quales 10000 sunt semi-diameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo t B partium 5657, inveni S B 9747, B E primâ vice 412, S μ 9503, i λ 413 : B E secundâ vice 421, O D 10186, X 8528.4 M P 8450,

cometæ a Sole. Sit enim E L portio eclipticæ, Sol in S, latitudo cometæ C I; in triangulo C I S, ad I rectangulo (7. Lib. III.) datur latus C I, itemque notum est latus I S differentia longitudinum Solis et cometæ, ideóque innotescit distantia cometæ a Sole C S.

152. Si duobus diebus sese invicem immediatè subsequentibus observentur longitudines H, I et latitudines C H, K I cometæ alicujus, dabitur arcus K C quem cometa motu diurno proprio descripsit. Quoniam enim in triangulo K M C, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, simulque nota sunt latera K M, C M, quæ sunt datarum latitudinum K I, C H complementa, innotescet arcus K C. Si verò altera latitudo fuerit australis, putâ C H, altera borealis ut G N, latus G M est summa





latitudinis G N et quadrantis N M, ac proindè etiam in hoc casu dabitur arcus C G.

153. Iisdem manentibus, inveniri potest nodus O orbitæ cometæ, datis enim in triangulo M C K lateribus M C, M K, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia H I, dabitur angulus M K C, qui ex 180°. subductus, relinquit angulum O K I. Jam verò datis triangulo O K I, ad I rectangulo, latitudine I K, et angulo O K I, invenitur angulus I O K, daturque arcus O I, quo addito longitudini I, obtinetur distantia nodi O a principio Arietis. Ex præcedentibus patet, datis duabus ascensionibus rectis et declinationibus, inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem et punctum in quo orbita illa æquatorem intersecat.

154. Iisdem positis sit K locus cometæ primò observatus, a loco nodi O subtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus O I. Datis in triangulo K O I, ad I rectangulo, lateribus K I, O I, dabitur arcus K O quem cometa a primo observationis die usque ad eclipticam descripsit. Jam verò arcus K O conferatur cum arcubus descriptis ab initio observationis cometæ in K, ad datum usque aliquod momentum singulis diebus pro arbitrio assumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa secuit eclipticam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

155. Si cometa primò observetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis observetur, accuratè trajectis per quatuor illas stellas duobus filis in superficie globi cœlestis, intersectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore observationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius semita in superficie globi cœlestis delineabitur.

156. Accuratè designatis in superficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum transire videbitur; hæc igitur loca ferè sunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex Terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quarè si filum per duo loca transiens extendatur donec eclipticam et æquatorem secet, habebuntur locus nodi, et inclinatio orbitæ cometicæ simulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione sequentes determinationes possint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex constructione Prop. præced. et ex iis quæ huic Propositioni addidimus.

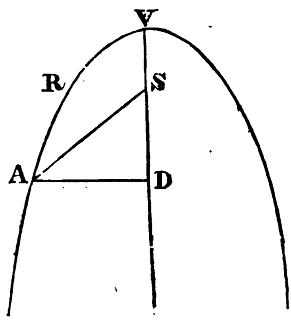
M N 8475, N P 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam t b 5640. Et per hanc operationem tandem distantias T X 4775 et τ Z 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ♋ et ascendentem in ♑ $1^{gr}. 53'$; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ $61^{gr}. 20\frac{1}{3}'$; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare a nodo $8^{gr}. 38'$, et esse in ♐ $27^{gr}. 43'$. cum latitudine australi $7^{gr}. 34'$; et ejus latus rectum esse 236.8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semi-diametri orbis magni posito 100000000; cometam verò in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, et Decemb. $8^{d}. 0^{h}, 4'$. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium et chordas angulorum ex tabulâ sinuum naturalium collectas determinavi graphicè, construendo schema satis amplum, in quo videlicet semi-diameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis $16\frac{1}{3}$ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet

	Dist. Comet. a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
	'	gr.	gr.	gr. '	gr. '	'	'
Dec. 12	2792	♑ 6. 32'	8. $18\frac{1}{2}$	♑ 6. $31\frac{1}{3}$	8. 26	+ 1	− $7\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13. $13\frac{2}{3}$	28. 0	♓ 13. $11\frac{3}{4}$	28. $10\frac{1}{12}$	+ 2	− $10\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15. $29\frac{2}{3}$	♉ 16. $59\frac{7}{8}$	15. $27\frac{2}{5}$	+ 0	+ $2\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29. $19\frac{3}{4}$	12. 4	29. $20\frac{6}{7}$	12. $3\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

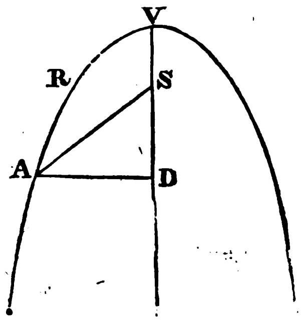
Postea verò Halleius noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quàm per descriptiones linearum fieri licuit; et

(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque V S, distantia umbilici a vertice = f, erit parabolæ latus rectum principale = 4 f. Fiat A D = x, erit spatium $V R A S = \frac{x^3 + 12 f^2 x}{24 f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà b b, habebitur æquatio $24 f b b = x^3 + 12 f^2 x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ et circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem A D, dabitur V D, (per Theor. II. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex D V et V S, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur



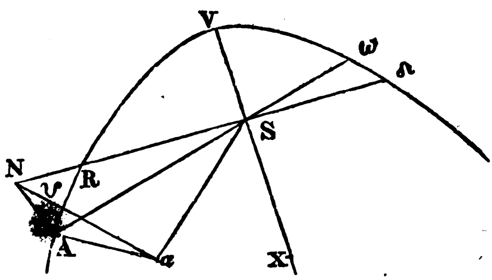
retinuit quidem locum nodorum in ♋ et ♑ $1^{gr}. 53'$. et inclinationem plani orbitæ ad eclipticam $61^{gr}. 20\frac{1}{3}'$. ut et tempus perihelii cometæ Decemb. $8^{d}. 0^{h}. 4'$: distantiam verò perihelii a nodo ascendente in orbitâ cometæ mensuratam invenit esse $9^{gr}. 20'$. et latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri Solis a Terrâ distantiâ partium 100000. Et ex

magnitudine. Præterea datur etiam D A, quarè nota est ratio inter S A et A D, id est, inter radium et sinum rectum anguli A S D,



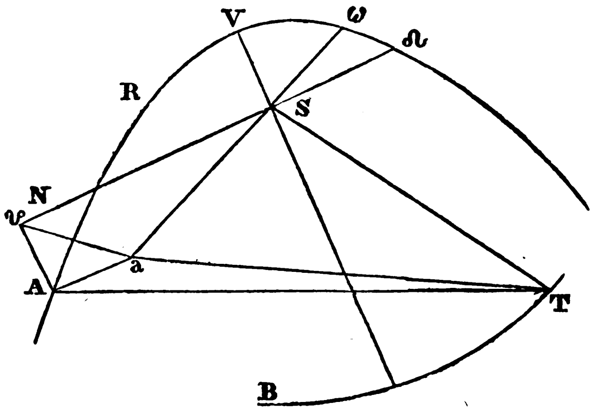
quem scilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est S A longitudine, quarè rectæ S A longitudo et inclinatio ad axem calculo determinari possunt.

158. Referat ☊ ω V, cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, sitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum observationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus sit axis V X positione datus; innotescat tempus quo cometa in perihelio V versatur, sitque ☊ ☋ linea nodorum positione cognita. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur spatium quod sit ad spatium ω V S, cognitum (per Theor. IV. de parab.) ut intervallum inter tempus datum et suprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum et observationem cometæ in ω; ponatur spatium illud dato rectilineo, putà b b, æquale. Deinde (157.) ipsi b b æquale fiat spatium parabolicum V R A S, et inveniatur tam positio quàm magnitudo rectæ S A respectu S V, cujus positio et magnitudo respectu distantiæ aphelii Terræ a Sole priùs notæ sunt. At si cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in Prop. XXXI. Lib. I. expositas, ducatur recta S A, talis ut area V R A S, sit ad totam ellipseos aream, sicut intervallum inter tempus datum et momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum est, dabiturque recta S A tam positione quàm magnitudine. Jam verò in utroque casu ex A ad nodorum lineam ☋ ☊ erigatur normalis A N, rectæ ☋ ☊ occurrens in N; ex eodem A, ad eclipticæ planum demittatur perpendiculum eidem rectæ occurrens in a, junganturque a N, a S, erit angulus A N a, inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ ac proinde cognitus (146). Deinde quoniam noti sunt anguli V S A, V S N, notus quoquè erit angulus N S A, horum summa vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo N a A, datis latere N A, et angulo A N a, innotescent reliqua latera N a et A a. Præterea in triangulo rectangulo S N a, dantur latera S N et N a ideóque dabuntur latus S a, et angulus N S a. Sed (145.) datur positio rectæ S N, quare nota erit positio rectæ S a, hoc est, cometæ longitudo heliocentrica, sive locus cometæ heliocentricus, ad eclipticam reductus. Denique in triangulo S A a rectangulo ad a, nota sunt omnia latera, ac proindè dabitur angulus A S a, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet vicissim inveniri posse tempus quo cometa datum in orbe suo locum tenet.



159. Iisdem manentibus sit B T orbis magnus, sitque Tellus in T ad tempus datum. Jungantur T A, T a, erit planum trianguli T A a, ad planum eclipticæ normale (Prop. XVIII. Lib. XI. Elem.). Jam in triangulo T S a, in plano eclipticæ datur latus S a, (158), notumque est latus S T, ex theoriâ Telluris, et utrumque latus in partibus mediocris distantiæ Telluris a Sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus T S a, ab illis comprehensus, quarè innotescent latus T a, et angulus S T a; sed datur T S positione, nempe locus Solis ad tempus datum, nota igitur

his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

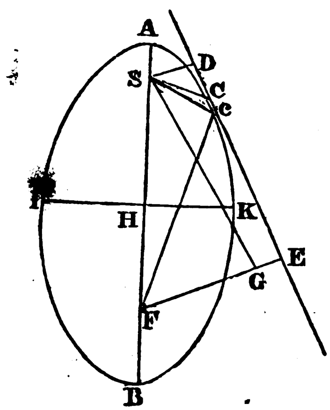


est positio rectæ T a, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad eclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo A a T, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ Telluris a Sole expressa (158. et ex theoriâ Telluris). Quarè innotescet angulus A T a, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa T A, distantia scilicet cometæ a Terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat lector in ejusdem celeberrimi viri Opusculo quod inscribitur: Cometographia, seu Astronomiæ Cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere et duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, et areæ ellipticæ radiis ad Solem ductis sint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in Monum. Paris. an. 1733. clarissimi viri methodum hic adjungemus.

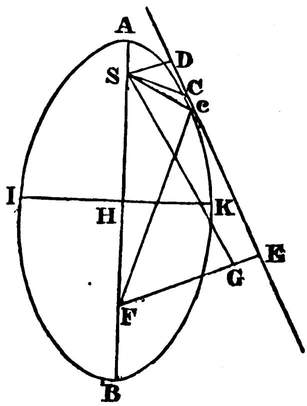
Ex datis tribus observationibus a se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, et exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum a se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideóque portio hæc rectilinea orbitæ et ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem. IV. et per ea quæ huic Lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in Monum. Paris. loco citato legitur.

His præmissis, sit S Sol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ a Sole, atquè etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis S D, hujus anguli S C D sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur S C = a, S D = b, designet e, spatiolum C c, tempusculo f percursum, sitque



x = A B, seu axi principali ellipseos quam cometa circà Solem in umbilico S, positum integro tempore periodico t, describit. Ut determinentur quantitates x et t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit q axis principalis ellipseos quam planeta describit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter est q. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ et minimæ distantiæ planetæ a Sole, erit distantia mediocris planetæ a Sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2}x$ est distantia mediocris cometæ, et $\frac{1}{2}q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici t. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector CS c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}\,SD \times Cc = \frac{1}{2}\,be$. Quarè, per alteram Kepleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}\,be$ est ad f, ut area tota ellipseos A C B I, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2}be} \times ACBI$. Nunc ut obtineatur area A C B I, ex puncto C, ad alterum umbilicum E, agatur recta $CF = AB - SC = x - a$ (Theor. III. de ellipsi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem C c productam in E, demittatur perpendicularis F E, sitque S G parallela rectæ D E, triangula rectangula S C D, F C E similia sunt, ob angulos S C D, F C E, æquales (Theor. IV. de ellips.) ideóque $SC(a) : SD(b) = FC(x-a) : FE = \frac{bx - ab}{a}$, ac proindè F G, seu $FE - SD = \frac{bx - 2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum similitudinem) $SC(a) : CD\ (\sqrt{a^2 - b^2}) = FC(x-a) : CE = \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, et hinc D E, vel S G, seu $CE + CD = \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed $FG = \frac{bx - 2ab}{a}$ (ex dem.), quarè est $SF = \sqrt{\frac{b^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque distantia S H vel F H umbilici alterutrius a centro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum S I H rectangulum in H, et per Theor. III. de ellipsi) erit $IH = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{a^2x^2 + 4ab^2x - 4a^2b^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{ax - a^2}$ ac proindè axis minor $IK = \frac{2b}{a}\sqrt{ax - a^2}$, et factum ex axe majori in minorem $= \frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2}$. Sed est factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumscripti, et præterea (249. Lib. I.) area rectanguli hujus est ad aream ellipseos ut quadratum axis A B, ad aream circuli huic quadrato inscripti; quarè $q^2 : \frac{1}{4}qp = \frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2} : ACBI = \frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax - a^2}$. Tandem in ultimâ expressione temporis periodici loco areæ A C B I, substituatur illius valor modò inventus, fiet $t = \frac{fpx}{aeq} \times \sqrt{ax - a^2}$, collatisque duobus ipsius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax - a^2}$,



et reductâ æquatione $x = \frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2}$. Jam si in expressionibus axis minoris et temporis periodici substituatur valor ipsius x, erit axis minor $IK = 2ben\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q - ae^2n^2}}$ et tempus periodicum $= f^3p^3n \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(f^2p^2q - ae^2n^2)^{\frac{3}{2}}}$. Hinc patet determinari posse omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis et positivis exprimantur, orbita A C B I erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus est species quædam ellipsis, cometa circulum quoque poterit describere, in eo autem casu æquales erunt distantiæ S A, S C, S B, axisque A B duplus fiet distantiæ S C, ac proindè $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2} = 2a$, et hinc $e = \frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor scilicet spatioli C c a cometâ tempore f percursi. Si e a sit cometæ

Tempus verum.		Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12. 4. 46	28028	♑ 6. 29. 25	8. 26. 0 Bor.	— 3. 5	— 2. 0
	21. 6. 37	61076	♒ 5. 6. 50	21. 43. 20	— 1. 42	+ 1. 7
	24. 6. 18	70008	18. 48. 20	25. 22. 40	— 1. 3	— 0. 25
	26. 5. 21	75576	28. 22. 45	27. 1. 36	— 1. 28	+ 0. 44
	29. 8. 3	14021	♓ 13. 12. 40	28. 10. 10	+ 1. 59	+ 0. 12
	30. 8. 10	86661	17. 40. 5	28. 11. 20	+ 1. 45	— 0. 33
Jan.	5. 6. 1½	101440	♈ 8. 49. 49	26. 15. 15	+ 0. 56	+ 0. 8
	9. 7. 0	110959	18. 44. 36	24. 12. 54	+ 0. 32	+ 0. 58
	10. 6. 6	113162	20. 41. 0	23. 44. 10	+ 0. 10	+ 0. 18
	13. 7. 9	120000	26. 0. 21	22. 17. 30	+ 0. 33	+ 0. 2
	25. 7. 59	145370	♉ 9. 33. 40	17. 57. 55	— 1. 20	+ 1. 25
	30. 8. 22	155303	13. 17. 41	16. 42. 7	— 2. 10	— 0. 11
Feb.	2. 6. 35	160951	15. 11. 11	16. 4. 15	— 2. 42	+ 0. 14
	5. 7. 4½	166686	16. 58. 25	15. 29. 13	— 0. 41	+ 2. 10
	25. 8. 41	202570	26. 15. 46	12. 48. 0	— 2. 49	+ 1. 14
Mar.	5. 11. 39	216205	29. 18. 35	12. 5. 40	+ 0. 35	+ 2. 24

Apparuit etiam hic cometa mense Novembri præcedente, et Coburgi in Saxoniâ a dno. Gottfried Kirch observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto et undecimo, stilo veteri; et ex positionibus ejus ad proximas stellas fixas ope telescopii nunc bipedalis nunc decempedalis satis accuratè observatis, ac differentia longitudinum Coburgi et Londini graduum undecim et locis fixarum a Poundio nostro observatis, Halleius noster loca cometæ determinavit ut sequitur.

velocitas ut fiat $a\,e^2\,n^2 = f^2\,p^2\,q$, tunc infinito æquales evadent expressiones axis majoris, minoris et temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipsim infinitè oblongatam seu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem si $a\,e^2\,n^2$, sit major quàm $f^2\,p^2\,q$, negativa fit expressio axis majoris, et orbita abit in hyperbolam, ac proindè cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum Telluris motu conferatur. Sit q dupla distantia mediocris Terræ a Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus sidereus seu intervallum 365. dier. 6hor. 9′: fiat mediocris distantia Telluris a Sole partium 10000000, ideóque $q = 20000000$, et $p = 62831853$, spatium C c unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{59182659953557939 \times a}{59182659953557939 - a\,e^2}$ et $t = \frac{1859278095175402232 \times a^{\frac{3}{2}}}{\overline{59182659953557939 - a\,e^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil ampliùs faciendum superest, nisi ut in casibus particularibus loco a, et e, substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas $a\,e^2$, minor majorve reperiatur numero constanti 59182659953557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem Telluris a Sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - a\,e^2}$, et $t = \frac{1859278095 \times a \sqrt{a}}{591826599 - a\,e^2 \times \sqrt{591826599 - a\,e^2}}$. Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus clariss. Cassini colligitur die 13. Octobris an. 1729. distantiam S C cometæ a Sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum D C S, fuisse 82°. 11′. Hinc invenitur quantitas $a\,e^2$ major quàm 591826599, ideóque (161.) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

Novemb. 3^d. 17^h. $2'$. tempore apparente Londini, cometa erat in ♌ 29^{gr}. $51'$. cum lat. bor. 1^{gr}. $17'$. $45''$.

Novemb. 5^d. 15^h. $58'$. cometa erat in ♍ 3^{gr}. $23'$. cum lat. bor. 1^{gr}. $6'$.

Novemb. 10^d. 16^h. $31'$. cometa æqualiter distabat a stellis Leonis σ ac τ Bayero; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo Flamstediano σ tunc habuit ♍ 14^{gr}. $15'$. cum lat. bor. 1^{gr}. $41'$. ferè, τ verò ♍ 17^{gr}. $3\frac{1}{2}$, cum lat. austr. 0^{gr}. $34'$. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15^{gr}. $39\frac{1}{4}'$. cum lat. bor. 0^{gr}. $33\frac{1}{2}'$. Sit distantia cometæ a rectâ illâ $10'$ vel $12'$ circiter, et differentia longitudinum cometæ et puncti illius medii erit $7'$, et differentia latitudinum $7\frac{1}{2}'$ circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15^{gr}. $32'$. cum lat. bor. $26'$. circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertiâ, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, et vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29^{gr}. $30'$. $22''$. latitudo borealis 1^{gr}. $25'$. $7''$. et distantia ejus a Sole 115546.

Porrò Halleius observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense Septembri post cædem Julii Cæsaris, anno Christi 531 Lampadio et Oreste Coss. anno Christi 1106 mense Februario, et sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ et insigni (præterquam quod sub mortem Cæsaris, cauda ob incommodam Telluris positionem minùs apparuisset:) quæsivit orbem ellipticum cujus axis major esset partium 1382957, existente mediocri distantiâ Telluris a Sole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ♋ 2^{gr}. $2'$; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61^{gr}. $6'$. $48''$; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22^{gr}. $44'$. $25''$; tempus æquatum perihelii Decemb. 7^d. 23^h. $9'$; distantiam perihelii a nodo ascendente in plano eclipticæ 9^{gr}. $17'$. $35''$; et axem conjugatum 18481.2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quàm in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum a Sole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum Terræ circà Solem dicatur T, distantia mediocris Terræ a Sole sit D, axis major ellipseos a cometâ descriptæ sit 2 a, ideóque mediocris distantia cometæ a Sole $= a$, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat $D = 10000$ partibus $T = 365$ dieb. 6^{hor}. $9'$. $= 525969'$, $t = 575$ annis, invenietur 2 a, seu axis major ellipseos a cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiâ Telluris a Sole earumdem partium 10000. In hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest.

(e) *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo clariss. D. Bouguer num. 160. et seq.

Tempus verum.			Long. obs.	Lat. Bor. obs.		Long. Comp.	Lat. Comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h. ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.	3. 16. 47	♌	29. 51. 0	1. 17. 45	♌	29. 51. 22	1. 17. 32 B	+ 0. 22	— 0. 11
	5. 15. 37	♍	3. 23. 0	1. 6. 0	♍	3. 24. 32	1. 6. 9	+ 1. 32	+ 0. 9
	10. 16. 18		15. 32. 0	0. 27. 0		15. 33. 2	0. 25. 7	+ 1. 2	— 1. 53
	16. 17. 0				♎	8. 16. 45	0. 53. 7 A		
	18. 21. 34					18. 52. 15	1. 26. 54		
	20. 17. 0					28. 10. 36	1. 53. 35		
	23. 17. 5				♏	13. 22. 42	2. 29. 0		
Dec.	12. 4. 46	♑	6. 32. 30	8. 23. 0	♑	9. 31. 20	8. 29. 6 B	— 1. 10	+ 1. 6
	21. 6. 37	♒	5. 8. 12	21. 42. 13	♒	5. 6. 14	21. 44. 42	— 1. 58	+ 2. 29
	24. 6. 18		18. 49. 23	25. 23. 5		18. 47. 30	25. 23. 35	— 1. 53	+ 0. 30
	26. 5. 21		28. 24. 13	27. 0. 52		28. 21. 42	27. 2. 1	— 2. 31	+ 1. 9
	29. 8. 3	♓	13. 10. 41	28. 9. 58	♓	13. 11. 14	28. 10. 38	+ 0. 33	+ 0. 40
	30. 8. 10		17. 38. 20	28. 11. 53		17. 38. 27	28. 11. 37	+ 0. 7	— 0. 16
Jan.	5. 6. 1½	♈	8. 48. 53	26. 15. 7	♈	8. 48. 51	26. 14. 57	— 0. 2	— 0. 10
	9. 7. 1		18. 44. 4	24. 11. 56		18. 43. 51	24. 12. 7	— 0. 13	+ 0. 21
	10. 6. 6		20. 40. 50	23. 43. 32		20. 40. 23	23. 43. 25	— 0. 27	— 0. 75
	13. 7. 9		25. 59. 48	22. 17. 28		26. 0. 8	22. 16. 32	+ 0. 20	— 0. 56
	25. 7. 59	♉	9. 35. 0	17. 56. 30	♉	9. 34. 11	17. 56. 6	— 0. 49	— 0. 24
	30. 8. 22		13. 19. 51	16. 42. 18		11. 18. 28	16. 40. 5	— 1. 23	— 2. 13
Feb.	2. 6. 35		15. 13. 58	16. 4. 1		15. 11. 59	16. 2. 7	— 1. 54	— 1. 54
	5. 7. 4½		16. 59. 6	15. 27. 3		16. 59. 17	15. 27. 0	+ 0. 11	— 0. 3
	25. 8. 41		26. 18. 35	12. 46. 46		26. 16. 59	12. 45. 22	— 1. 36	— 1. 24
Mar.	1. 11. 10		27. 52. 42	12. 23. 40		27. 51. 47	12. 22. 28	— 0. 55	— 1. 12
	5. 11. 39		29. 18. 0	12. 3. 26		29. 20. 11	12. 2. 50	+ 2. 11	— 0. 26
	9. 8. 38		0. 43. 4	11. 45. 52	♊	0. 42. 43	11. 45. 35	— 0. 21	— 0. 17

Observationes cometæ hujus a principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quàm motus planetarum congruere solent cum eorum theoriis, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hic rectè definitum fuisse.

In tabulâ præcedente omisimus observationes diebus Novembris 16, 18, 20 et 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. Ponthæus utique et socii, Novemb. 17. st. vet. horâ sextâ matutinâ Romæ, id est, horâ 5. 10′. Londini, filis ad fixas applicatis, cometam observarunt in ♎ 8gr. 30′. cum latitudine australi 0gr. 40′. Extant eorum observationes in Tractatu, quem Ponthæus de hoc cometâ in lucem edidit. Cellius, qui aderat et observationes suas in Epistolâ ad D. Cassinum misit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′. cum latitudine australi 0gr. 30′. Eâdem horâ Galletius Avenioni (id est, horâ matutinâ 5, 42 Londini) cometam vidit in ♎ 8gr. sine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″. cum latitudine australi 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′. Romæ (id est, horâ 5. 40′. Londini) Ponthæus cometam vidit in ♎ 13gr. 30′. cum latitudine australi 1gr. 20′. Cellius in ♎ 13gr. 30′. cum latitudine australi 1gr. 20′. Galletius autem horâ matutinâ 5. 30′. Avenioni cometam vidit in ♎ 13gr. 00′. cum latitudine australi 1gr. 00′. Et R. P. Ango in Academiâ Flexiensi apud Gallos, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9′. Londini) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in rectâ lineâ in Virginis australi manu Bayero ψ, et altera est extrema alæ Bayero θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′. cum latitudine australi 50′. Eodem die Bostoniæ in Novâ Angliâ in latitudine 42½. graduum, horâ quintâ matutinâ, (id est Londini horâ matutinâ 9. 44′.) cometa visus est prope ♎ 14gr. cum latitudine australi 1gr. 30′. uti a cl. Halleio accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ Cantabrigiæ, cometa (observante juvene quodam) distabat a Spicâ ♍ quasi 2gr. boreazephyrum versus. Erat autem Spica in ♎ 19gr. 23′. 47″. cum lat. austr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. Bostoniæ in Novâ Angliâ, cometa distabat a Spica ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula Jamaicæ, cometa distabat a Spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. Arthurus Stoper ad fluvium Patuxent, prope Hunting Creek in Maryland, in confinio Virginiæ in lat. 38½gr. horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10. Londini) cometam vidit supra Spicam ♍, et cum Spicâ propemodum conjunctum, existente distantiâ inter eosdem quasi ¾gr. Et (f) ex his observationibus inter se collatis colligo quod horâ 9. 44′. Londini cometa erat in ♎ 18gr. 50′. cum latitudine australi 1gr. 25′. circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″. cum latitudine australi 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. Montenarus Astronomiæ Professor Paduensis, horâ sextâ matutinâ Venetiis (id est, horâ 5. 10′. Londini) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30′. Eodem die Bostoniæ, distabat cometa a Spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideóque erat in ♎ 23gr. 24′. circiter.

Nov. 21. Ponthæus et socii hor. mat. 7¼. cometam observarunt in ♎ 27gr. 50′. cum latitudine australi 1gr. 16′. Cellius in ♎ 28gr. Ango horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′. Montenarus in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in Insulâ Jamaicæ cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spicâ Virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ in Indiâ Orientali, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′. Londini) capta est distantia cometæ a Spicâ ♍ 7gr. 35′. in orientem. In lineâ rectâ erat inter Spicam et Lancem,

(f) * *Ex his observationibus inter se collatis* via cometæ inter stellas determinatur, et hinc colliguntur cometæ longitudo et latitudo (149.) hor. 9. 44′. Londini, reductione scilicet factâ ad meridianum Londinensem.

ideóque versabatur in ♎ $26^{gr}.\ 58'$. cum lat. australi $1^{gr}.\ 11'$. circiter; et post horas 5. et 40′. (ad horam scilicet quintam matutinam Londini) erat in ♎ $28^{gr}.\ 12'$. cum lat. austr. $1^{gr}.\ 16'$. Per theoriam verò cometa jam erat in ♎ $28^{gr}.\ 10'.\ 36''$. cum latitudine australi $1^{gr}.\ 53'.\ 35''$.

Nov. 22. cometa visus est a Montenaro in ♍ $2^{gr}.\ 33'$. Bostoniæ autem in Novâ Angliâ apparuit in ♍ 3^{gr}. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, $1^{gr}.\ 30'$. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in ♍ $1^{gr}.\ 50'$; ideóque ad horam quintam matutinam Londini cometa erat in ♍ $3^{gr}.\ 5'$. circiter. Eodem die Londini horâ mat. $6\frac{1}{2}$. Hookius noster cometam vidit in ♍ $3^{gr}.\ 30'$. circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per Spicam Virginis et Cor Leonis non exactè quidem, sed a lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. Montenarus itidem notavit quod linea a cometâ per Spicam ducta, hoc die et sequentibus transibat per australe latus Cordis Leonis, interposito perparvo intervallo inter Cor Leonis et hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis et Spicam Virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ $3^{gr}.\ 46'$; in angulo $2^{gr}.\ 51'$.

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3^{gr}. ejus latitudo fuisset $2^{gr}.\ 26'$. Sed cùm cometa consentientibus Hookio et Montenaro, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione Montenari, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque $1^{gr}.\ 30'$. circiter, et consentientibus Hookio, Montenaro et Angone perpetuò augebatur, ideóque jam sensibiliter major erat quàm $1^{gr}.\ 30'$. Inter limites autem jam constitutos $2^{gr}.\ 26'$. et $1^{gr}.\ 30'$. magnitudine mediocri latitudo erit $1^{gr}.\ 58'$. circiter. Cauda cometæ, consentientibus Hookio et Montenaro, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a stellâ istâ, juxta Hookium in austrum, juxta Montenarum in boream; ideóque declinatio illa vix fuit sensibilis, et cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione Solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ Noriburgi (id est hora $4\frac{1}{2}$. Londini) D. Zimmerman cometam vidit in ♍ $8^{gr}.\ 8'$. cum latitudine australi $2^{gr}.\ 31'$. captis scilicet ejus distantiis a stellis fixis.

Nov. 24. ante ortum Solis cometa visus est a Montenaro in ♍ $12^{gr}.\ 52$. ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis et Spicam Virginis ducebatur, ideóque latitudinem habuit paulo minorem quàm $2^{gr}.\ 38'$. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus Montenari, Angonis et Hookii, perpetuò augebatur; ideóque jam paulò major erat quàm $1^{gr}.\ 58'$; et magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest $2^{gr}.\ 18'$. Latitudinem Ponthæus et Galletius jam et decrevisse volunt, et Cellius et observator in Novâ

Angliâ eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradûs unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes Ponthæi et Cellii, eæ præsertim quæ per azimuthos et altitudines capiebantur, ut et eæ Galletii: meliores sunt eæ quæ per positiones cometæ ad fixas a Montenaro, Hookio, Angone, et observatore in Novâ Angliâ, et nonnunquam a Ponthæo et Cellio sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam Ballasoræ cometa observabatur in ♍ $11^{gr}. 45'$; ideóque ad horam quintam matutinam Londini erat in ♍ 13^{gr}. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ $13^{gr}. 22'. 42''$.

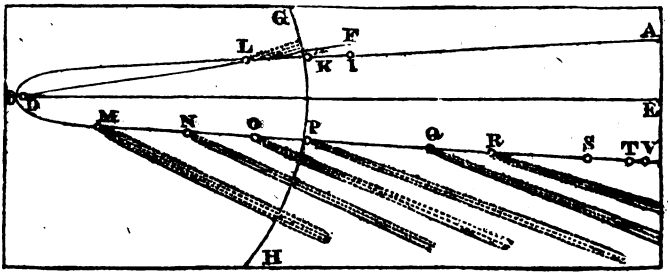
Nov. 25. ante ortum Solis Montenarus cometam observavit in ♍ $17\frac{3}{4}^{gr}$. circiter. Et Cellius observavit eodem tempore quod cometa erat in lineâ rectâ inter stellam lucidam in dextro femore Virginis et lancem australem Libræ, et hæc recta secat viam cometæ in ♍ $18^{gr}. 36'$. Per theoriam verò cometa jam erat in ♍ $18\frac{1}{3}^{gr}$. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, et congruendo probant unum et eundem fuisse cometam, qui toto tempore a quarto die Novembris ad usque nonum Martii apparuit. Trajectoria cometæ hujus (g) bis secuit planum eclipticæ, et propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine Virginis et principio Capricorni, intervallo graduum 98. circiter; ideóque cursus cometæ plurimum deflectebatur a circulo maximo. Nam et mense Novembri cursus ejus tribus saltem gradibus ab eclipticâ in austrum declinabat, et postea mense Decembri gradibus 29. vergebat ab eclipticâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in Solem et redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit Montenarus. Pergebat hic cometa per signa novem, a Leonis scilicet ultimo gradu ad principium Geminorum, præter signum Leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; et nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Mòtus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum Novembris descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter Novemb. 26. et Decemb. 12. spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum

(g) * *Bis secuit planum eclipticæ.* Tempus quo cometa secat eclipticam inveniri potest per num. 145. et 154.

theoriâ planetarum, et cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, et caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi A B C denotat trajectoriam cometæ, D Solem, D E trajectoriæ axem, D F lineam nodorum, G H intersectionem sphæræ



orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ Nov. 4. ann. 1680, K locum ejusdem Nov. 11. L locum Nov. 19. M locum Dec. 12. N locum Dec. 21. O locum Dec. 29. P locum Jan. 5. sequent. Q locum Jan. 25. R locum Feb. 5. S locum Feb. 25. T locum Mar. 5. et V locum Mar. 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. et 6. cauda nondum apparuit. Nov. 11. cauda jam cœpta non nisi semissem gradûs unius longa tubo decempedali visa fuit. Nov. 17. cauda gradûs amplius quindecim longa Ponthæo apparuit. Nov. 18. cauda 30gr. longa, Solique directe opposita in Novâ Angliâ cernebatur, et protendebatur usque ad stellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. Nov. 19. in Maryland cauda visa fuit gradûs 15. vel 20. longa. Dec. 10. cauda (observante Flamstedio) transibat per medium distantiæ inter caudam Serpentis Ophiuchi et stellam δ in Aquilæ australi alâ, et desinebat prope stellas A, ω, b in tabulis Bayeri. Terminus igitur erat in ♑ 19½gr. cum latitudine boreali circiter. Dec. 11. cauda surgebat ad usque caput Sagittæ (Bayero α, β,) desinens in ♑ 26gr. 43′. cum latitudine boreali 38gr. 34′. Dec. 12. cauda transibat per medium Sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42½gr. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda Dec. 12. hora 5. 40′. Romæ (observante Ponthæo) supra Cygni uropygium ad gradus 10. sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum et boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3. juxta terminum superiorem, ideóque medium ejus distabat a stellâ illâ $2^{gr}. 15'$. austrum versus, et terminus superior erat in ♓ 22^{gr}. cum latitudine boreali 61^{gr}. Et hinc longa erat cauda 70^{gr}. circiter. Dec. 21. eadem surgebat fere ad cathedram Cassiopeiæ, æqualiter distans a β et Schedir, et distantiam ab utrâque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideóque desinens in ♈ 24^{gr}. cum latitudine $47\frac{1}{2}^{gr}$. Dec. 29. cauda tangebat Scheat sitam ad sinistram, et intervallum stellarum duarum in pede boreali Andromedæ accuratè complebat, et longa erat 54^{gr}; ideóque desinebat in ♉ 19^{gr}. cum latitudine 35^{gr}. Jan. 5. cauda tetigit stellam π in pectore Andromedæ ad latus ejus dextrum, et stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; et (juxta observationes nostras) longa erat 40^{gr}; curva autem erat et convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem et caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4. juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10. vel 11. graduum, et chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. cauda luce satis sensibili terminabatur inter Alamech et Algol, et luce tenuissimâ desinebat e regione stellæ κ in latere Persei. Distantia termini caudæ a circulo Solem et cometam jungente erat $3^{gr}. 50'$. et inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. Jan. 25. et 26. cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6. vel 7; et nocte unâ et alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ et ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim et paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, ideóque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique Feb. 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. Ponthæus autem Feb. 7. se caudam ad longitudinem graduum 12. vidisse scribit. Feb. 25. et deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti et reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis et planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideóque cùm distantia cometæ a centro Solis Decemb. 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quàm calor quem Terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: et calor ferri candentis (i) (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideóque calor, quem Terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores et exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, et calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideóque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, et idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: (k) et optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod cometa mense Decembri, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem et splendidiorem quàm antea mense Novembri, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ et fulgentissimæ e cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quàm vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit.

Cæterùm de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite cometæ in Terram, vel denique

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In Transact. Philosoph. num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad Cor. 4. Prop. VIII. Lib. III.) Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quàm calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri candentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quàm calor aquæ ebullientis.

(k) * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in Elementis Chemiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò diutiùs calorem in corporibùs retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coërcet, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsâ caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspicionem induxerunt, durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quàm eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

nubem esse seu vaporem a capite cometæ jugiter surgentem et abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum et fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideóque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, et sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est et ægriùs sentitur: in cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quâtenus in jubare est, sed quâtenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux fixarum et planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur, fixas ab Ægyptiis cometas nonnunquam visas fuisse, id, quoniam rarissimè contingit, adscribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio et scintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescunt. Aëris et ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est quòd scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: et cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos sine omni refractione sensibili. Ne quis contendat quod caudæ non soleant videri in cometis, cùm eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, et propterea caudas fixarum non cerni: (m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est et valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense Decembri, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis et ultrà: postea Jan. 27 et 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6. vel 7. gradus, et luce obscurissimâ; quæ cerni vix

(m) * *Sciendum est.* Ut notum est ex telescopiorum theoriâ apud omnes passim rerum opticarum et catoptricarum scriptores. Sed ea potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate, visionis distinctione et telescopiorum beneficiis dedit clariss. vir Robert Smith in eximio Opere Optico.

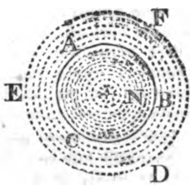
posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. Sed et Feb. 9 et 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porrò si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, et pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. Decembr. 28. hora 8½ p. m. Londini, versabatur in ♓ 8gr. 41′. cum latitudine boreali 28gr. 6′. Sole existente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. Dec. 29. versabatur in ♓ 8gr. 41′. cum latitudine boreali 28gr. 40′. Sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′. circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, et cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis et aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione Solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus Tychonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

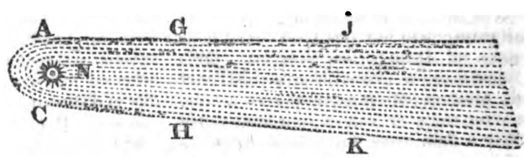
Caudas autem a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ([a]) ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole

([a]) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprime congruunt. Cauda a cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes a Sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per Solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quàm ad illam partem deflectat. Quia autem vapor a capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti a Sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe a Sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per Solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutiquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quàm caput ipsum progreditur, et quo altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quo longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus, quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum, ac proindè cauda non a Sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc a Sole deviatio et curvatura eò minor est quò recta Solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directè a Sole vel ad Solem tenderet, cauda quoque foret recta et a Sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta Solem et cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior et distinctius terminata apparebit quàm facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas a capitibus oriri et in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam clariss. D. de Mairan in eximio Opere de Aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad Solem proximè accedere observationibus compertum est; hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur et ad Solis oppositum dirigatur, ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis

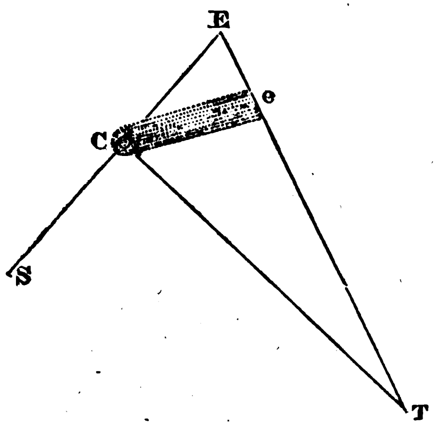
directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis deviatio paulatim sentitur, et indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut et ubi caput cometæ ad Solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, et magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideò quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ a Sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt et latiores, et luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores et limite minus indistincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in quâ caput conspicitur; et propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi et vapores ascendere debent a Sole (uti jam dictum est) et superiora vel rectà petere, si corpus fumans quiescit, vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum





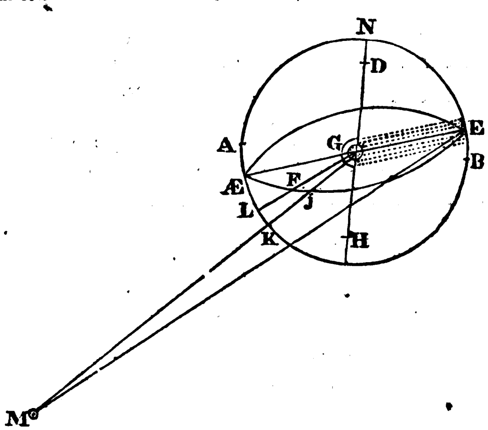
solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat et redibat. Quamvis autem levissima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cùm tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmosphærâ E D F, in transitu scilicet propè Solem collectâ, ità ut in majori a cometæ nucleo N, distantiâ levior rariorque semper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphærâ solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, e contrà verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus Solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum repræsentat. Ex dictis patet hanc sententiam cum Newtonianis Principiis consentire; et quidem Newtonus describens posteà Kepleri opinionem quæ eadem ferè est, ab eâ non videtur alienus.

in vicinia Solis et juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: et quia vapor in columnæ latere præce-



166. Longitudo caudæ hoc modo potest inveniri. Sit S Sol, C cometa cujus cauda C e; ex cognitis Solis et cometæ locis notus erit angulus T C E, datâque (per observ.) deviatione caudæ a Solis opposito, dabitur angulus E C e, ac proindè innotescet angulus T C e, quem scilicet cauda efficit cum rectâ Terram et cometam jungente. Prætereà (per observ.) innotescit angulus ad Terram C T e, quem cauda subtendit, quarè (per theoriam cometæ) datâ cometæ distantiâ a Terrâ, dabitur caudæ longitudo.

167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiscum, suâ humanitate, communicavit clariss. vir et in rebus mathematicis versatissimus D. de Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret: paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum describatur sphæra cujus radii G A, G E, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hâc sphærâ planum eclipticæ parallelum habens polos in D et H, itemque concipiatur planum A K B E parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit Terra in M, ejus longitudo e cometâ visa et ad planum orbitæ A K B E reducta, exprimetur per arcum K B, latitudo autem per arcum K j. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ e Terrâ visa, dabitur longitudo Terræ e cometâ visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) et (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani A K B E, ad planum eclipticæ, itemque innotescit locus nodi B. Quarè (per trigon. sphær.) invenietur longitudo Terræ respectu plani A K B E, cujus mensura est arcus B N A K, dabiturque latitudo K j. Jam verò ductâ lineâ M E, ex Terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo et latitudo e Terrâ visæ (per observ.) notæ sunt, agatur G F parallela rectæ E M, eodem planè modo ac suprà innotescet positio puncti F in superficie sphæræ respectu plani A K B E, descriptoque arcu circuli maximi G F L, invenientur arcus B N A L et F L. Sed in triangulo sphærico G j F, datis latere G j, complemento scilicet ad j K, et latere G F, complemento ad F L, atque latere F j, mensurâ anguli F G j, qui æqualis est angulo G M E, invenietur angulus G F j. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphæræ et cometæ, atque per extremitatem caudæ E, cujusque sectio cum plano A N B, sit recta E G Æ, formabitur alterum triangulum sphæricum Æ F L, cujus jam innotescunt angulus Æ F L et latus F L, quare dabitur latus Æ L, ac proindè etiam dabitur arcus B A Æ, ob datum arcum B A L; innotescet præterea arcus B E, atquè obtinebitur arcus Æ F, qui additus arcui F j, dabit arcum Æ j, ideóque dabitur arcus E j, mensura anguli rectilinei j G E, vel M G E. Datis autem in triangulo rectilineo M G E, angulis M G E, G M E et latere G M, dabitur latus G E, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ a Terrâ in partibus mediocris distantiæ Terræ a Sole expressa, in iisdem quoquè partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur distantia cometæ a nodo ex Sole visa, si ex hâc distantiâ subtrahatur arcus B E, habebitur angulus quem recta per Solem et cometam ducta comprehendit cum caudâ G E, hoc est, deviatio cometæ a Sole.



dente paulo recentior est, ideò etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosiùs reflectet, et limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis et incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio propterea quod vel a mutationibus aëris nostri, et motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideóque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; et propterea si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam [b] multis experimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciprocè ut quadratum distantiæ locorum a centro Terræ) computationem [c] per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascen-

[b] * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt passim rerum physicarum scriptores, sed præsertim clariss. Muskembroek in Physicâ. Videantur etiam Transactiones Philosophicæ an. 1671. num. 73.

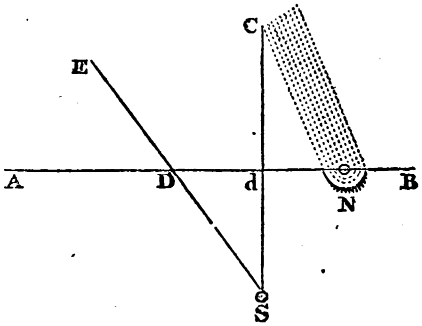
[c] 168. * *Per Corol. Prop. XXII. Lib. II.* Sit (in figurâ Prop. XXII.) S centrum Terræ, S A ejusdem semi-diameter mediocris pedum 19615800 $= r$, A B pedum 850, et ideò S P $= 19616650 = a$, S F $= 2r$, dignitas hyperbolæ f a h $= rr$, ideóque A a $= r$, F f $= \frac{1}{2} r$, et B b $= \frac{rr}{a}$ ac proinde A a — F f $= \frac{1}{2} r$, et A a — B b $= \frac{ar - rr}{a}$. Densitas A H seu S t $= m = 33$, densitas B j, seu S u $= n = 32$, et densitas F N, sive S Z $= d$. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per Theor. IV. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, et (per Corol. Prop. XXII. Lib. II.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2} r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{1961665}{170}$, et ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d}$ $= 154.20879349$. Densitas ergò aëris in A seu in superficie Telluris se habet ad densitatem aëris in F, seu in distantiâ semi-diametri Telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porrò logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 et ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quàm 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quàm 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semi-diameter Terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis Solis ponatur 10″. cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semi-diameter orbis magni est ad semi-diametrum Terræ ut radius ad sinum parallaxis Solis (30. Lib. III.) erit semi-diameter orbis magni pedum circiter 500000000000. Sed semi-diameter orbis Saturni circiter decuplo major est (Phæn. IV.) erit igitur hæc semi-diameter pedum 5000000000000, ideóque diameter pedum 10000000000000, sive digitorum 120000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus, ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multò minor est ratione densitatum modò inventâ;

datur a superficie Terræ ad altitudinem semi-diametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideóque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni et longè ultrà. Proindè cùm aër adhuc altior in immensum rarescat, et coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, et gravitationem particularum aëris et vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem aëris et vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam et caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, et astra omnia et ipsam Lunam obscurat et extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quàm aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, et

quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semi-diametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni et longè ultrà.

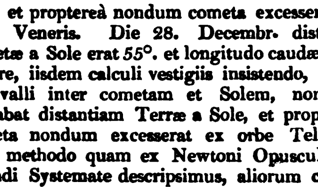
(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S Solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta a termino illo C ad Solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cœpit a capite, si vapor ille rectà ascendat a Sole. Quia autem vapor non rectà ascendit a Sole, sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164.) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa a lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet, putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit, a nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs a Sole, motum cometæ propressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò antè explicatas inveniri potest tempus quo cometa



locum D occupavit, et potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat, notando locum ubi recta illa trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere cœpit a capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit a Sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, et cum motu ascensûs sui eundem componendo, ascendit obliquè. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere cœperat a capite ante Dec. 11. ideóque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ Solis celerrimè ascendebat, et postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; et ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui a tempore perihelii ascenderat; et vapor, qui primus ascendit, et terminum caudæ composuit, non priùs evanuit quàm ob nimiam suam tam a Sole

ideóque habebitur proxime tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta sunt, cometarum, quandiù nobis conspicui sunt, maxima possibilis distantia a Sole et Terrâ definiri potest. Referat S Solem, T Terram, S T A distantiam cometæ a Sole, sitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur a termino caudæ secundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, secans lineam T A in C, et quia cauda semper opponitur Soli quamproximè, ideóque Sol, caput cometæ et terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ T A, in A, caput cometæ C necessariò reperietur inter T et A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, et lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci possunt, secant lineam T A, alicubi inter T et A. Quarè cometa non potest longius abesse a Terrâ quàm intervallo T A, nec a Sole quàm intervallo S A ultrà Solem, vel S T, citrà. Exemplo sit cometa an. 1680. cometa ille die 12. Dec. distabat 9°. a Sole et longitudo caudæ erat 35°. Quarè construatur triangulum T S A, cujus angulus T æqualis sit distantiæ 9°. et angulus A seu angulus A T B æqualis sit longitudini caudæ 35°: erit S A ad S T, id est, limes maximæ possibilis distantiæ cometæ a Sole ad semi-diametrum orbis magni ut sinus anguli T, ad sinum anguli A, hoc est, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minus distabat a Sole quàm $\frac{3}{11}$ partibus distantiæ Terræ a Sole, et propterea versabatur aut intrà orbem Mercurii aut inter orbem illum et Terram. Rursus die 21. Dec. distantia cometæ a Sole erat 32°. $\frac{2}{5}$ et longitudo caudæ 70°. ergò ut sinus 32°. $\frac{2}{5}$. ad sinum 70°. hoc est, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam et Solem ad distantiam Terræ a



Sole, et propterea nondum cometa excesserat ex orbe Veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ a Sole erat 55°. et longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam et Solem, nondum æquabat distantiam Terræ a Sole, et propterea cometa nondum excesserat ex orbe Telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni Opusculo de Mundi Systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometas omnes, quandiù se nobis ostendunt, versari intrà spatium sphæricum centro Sole et intervallo Solis ac Terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum.

illustrante quàm ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri et perpetuò a capitibus et mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum et exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuêre sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. (e) Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum et cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum et progressum in partes a Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, (f) non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, et materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideóque servatâ quantitate materiæ intendi et remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, et fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a Sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione et refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, et ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ priùs tendebat in Solem, ascendet et secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa Solem et eâ actione conantur a Sole recedere, at Solis atmosphæra et materia cœlorum vel planè quiescit, vel motu solo quem a Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ sunt causæ ascensûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores sunt, et cometæ intra densiorem et eâ ratione graviorem Solis atmosphæram consistunt, et caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum et interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in ellipsibus pro more capitum, et per

(e) * *Et hinc rursùs colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio Prop. XI. Lib. II.
(f) * *Non est a ratione prorsus alienum* (165).

motum illum capita semper comitabuntur et iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus Solem versus, quàm gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideóque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ et capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillimè accipiant et postea liberrimè servent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, et vel indè post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, et subindè in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram Solis descendent, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quàm juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem et spargi per cœlos universos, deindè paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, et cum eorum atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, et Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent et nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati ((g) ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes et flumina: sic ad conservationem marium et humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus et vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem et putrefactionem consumitur et in Terram aridam convertitur, continuò suppleri et refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò crescunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, et limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ in dies augetur, et liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est, sed subtilissima et optima, et ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

(g) * *Ut aliqui cum ratione philosophantur.* Horumce philosophorum rationes videre est passim apud omnes cultiores physicos. Legantur Transact. Philosoph. an. 1687. 1694. 1729. et Monum. Acad. Paris. an. 1703.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur, et (eâ certè in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: et vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modò phænomena eorum Hevelius rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad Solem calefacta in caudas maximas et fulgentissimas abiêre, et nuclei fumo forsan crassiore et nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior et nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quàm antea. Mense enim Decembri cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense Novembri cum stellis primæ et secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam Cantabrigiensi, Novem. 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ et obtusâ, æquabat Spicam Virginis, et clarius micabat quàm postea. Et Montenaro Nov. 20. st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et D. Storer literis, quæ in manus nostras incidêre, scripsit caput ejus mense Decembri, ubi caudam maximam et fulgentissimam emittebat, parvum esse et magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense Novembri ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, et paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas et fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura et exigua. Nam anno 1668. Mart. 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ R. P. Valentinus Estancius, Brasiliæ agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo et vix conspicuo, caudâ verò suprà modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, et horizonti ferè parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subindè notabiliter decrescens; et interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Undè etiam in Lusitaniâ quartam ferè cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni portensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infrà horizontem delitescente. Ex incremento caudæ et decremento splendoris manifestum est, quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in Chronico Saxonico similis legitur cometa anni 1106. *cujus stella erat parva et obscura* (ut ille anni 1680.) *sed splendor* *qui ex eâ exivit valde clarus et quasi ingens trabs ad orientem et aquilonem tendebat*, ut habet etiam Hevelius ex Simeone Dunelmensi Monacho. Apparuit initio mensis Februarii, ac deinceps circa vesperam, ad occasum Solis brumalem. Indè verò et ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab horâ tertiâ* (rectiùs sextâ) *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab Aristotele descriptus Lib. I. Meteor. VI., *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, et mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ scilicet) *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cùm* (cauda) *jam minus flagraret, reddita est* (capiti) *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* (id est, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. Olymp. 101.) *et ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulò superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus et Soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad Solem propiùs accedunt, ut plurimùm minores esse, ne Solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus

(h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproximè clariss. Halleius suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607. descriptus est a Keplero et Longomontano, et quem Halleius ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verùm tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus a cæteris planetis et præsertim a Jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideòque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet eclipticam sub eodem angulo et in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum clariss. Halleius diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros et revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri possunt per methodum num. 160. expositam.

post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per Propositionem superiorem inventa; et seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, et ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam et secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè a perigæo abesse. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur sectio conica: (m) et ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D et E, nempe D area inter observationem primam et secundam, et E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D + E velocitate cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. Augeatur (n) longitudo nodorum plani trajectoriæ; additis ad longitudinem illam 20′. vel 30′. quæ dicantur P; et servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, (o) et ejusdem areæ duæ inter

(k) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longè a perigæo, illius motus magis accuratè definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in Prop. præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverâ habere observatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine, respectu semitæ Telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit, ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur prætereà G ad 1, ut areæ inter observationem primam et secundam ad aream inter observationem secundam et tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad Solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam et tertiam. Si reperiatur T = S, et G = C, inventa plani trajectoriæ positio vera erit et accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter, erit T — S, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam ortus, nimirum ex positione plani trajectoriæ minus accuratâ, et G — C, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam et secundam, ad tempus inter observationem secundam et tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora.

(n) * *Longitudo nodorum,* per num. 145. inventa.

(o) * *Et ejusdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres observationes radiis ad Solem ductis descriptarum ratio sit ut g, ad 1; sitque t, observationes descriptæ, quæ sint d et e, nec non tempus totum t, quo area tota $d + e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, et augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′. vel 30′. quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, (p) ut et ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ et ϵ, et tempus totum τ, quo area tota $\delta + \epsilon$ describi debeat.

(q) Jam sit C ad 1 ut A ad B, et G ad 1 ut D ad E, et g ad 1 ut d ad e, et γ ad 1 ut δ ad ϵ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; et signis + et — probè observatis quærantur numeri m et n, eâ lege, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, et $2T - 2S$

tempus totum quo cometa utramque aream describeret. Si deprehendatur $t = S$ et $g = C$, assumpta plani positio vera erit et accurata. Sin aliter erit, ut suprà in operatione 1ª, $t - S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $g - C$ error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam ad tertiam. Uterque hic error oritur ex positione non satis accuratâ plani trajectoriæ ad planum eclipticæ.

(p) * *Ut et ejusdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, sitque τ tempus totum quo area tota $\delta + \epsilon$, describi debeat. Si fuerit $\tau = S$ et $\gamma = C$, assumpta plani trajectoriæ positio vera est et accurata. Sin contrà, erit $\tau - S$, error in tempore toto inter observationem primam et tertiam, et $\gamma - C$, error in ratione temporis inter observationem primam et secundam ad tempus inter observationem secundam et tertiam.

(q) * *Jam sit C ad* 1. Iisdem servatis denominationibus quas adhibet Newtonus, instituatur operatio per regulam falsæ positionis. Ad inveniendum errorem ortum ex assumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum $T - \tau$ ad differentiam positionum $T - S$, ità error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam et tertiam. Simili modo dicatur, $G - \gamma : G - C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam et tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t} \times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g} \times P$. Est itaque vera et correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ $I + \frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, sive $I + \frac{G-C}{G-\gamma} \times Q$; et vera longitudo nodi est $K + \frac{T-S}{T-t} \times P$ vel $K + \frac{G-C}{G-g} \times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quàm in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P$, separatim æquari $m \times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t} = m$ et $\frac{G-C}{G-g} = m$. Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$ et $\frac{G-C}{G-\gamma} \times Q = n \times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau} = n$, et $\frac{G-C}{G-\gamma} = n$. Hinc proveniet $mT - mt = T - S$ et $mG - mg = G - C$; item $nT - n\tau = T - S$, et $nG - ng = G - C$, undè fit $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$, et $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$. Quarè si tales quærantur numeri m et n, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, et $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau} \times Q$, et $\frac{G-C}{T-\tau} \times Q = n \times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t} \times P$ et $\frac{G-C}{G-g} \times P = mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit n Q et error longitudinis nodi m P. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ erit $I + nQ$, et $K + mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

æquale m T — m t + n T — n τ. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ et K longitudinem nodi alterutrius, erit I + n Q vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, et K + m P vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r et ϱ designent latera recta trajectoriæ, et quantitates $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit R + m r — m R + n ϱ — n R verum latus rectum, et $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (s) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. e. i.

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, et orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum et eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, et ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quàm cum observationibus suprà

(r) * *Ac deniquè.* Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ et tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, et trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem planè methodo quam modò adhibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprà præcedentem ductus in m, et ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum eclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sivè ipsi R, addi debet m r — m R, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet n ϱ — n R, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit R + m r — m R + n ϱ — n R, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ et tertiâ respectivè $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L + m l - m L + n \lambda - n L}$.

(s) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim Solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit et dato latere transverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici Telluris circà Solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

contuli; sed etiam ex eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 et 1665 apparuit, et ab Hevelio observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines et latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus Halleius noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, et tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ 21gr. 18′. 40″. distantiam perihelii a nodo in orbitâ 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″. cum latitudine austrinâ heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio Novemb. 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato Londini, vel 13h. 8′. Gedani, stylo veteri, et latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantiâ 100000. Quàm probè loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab Halleio supputatâ.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus.

Temp. appar. Gedani, st. vet.	Observatæ cometæ distantiæ.		Loca observata.		Loca computata in orbe.
		gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Decemb. $3^{d}.\ 18^{h}.\ 29\frac{1}{2}$	a Corde Leonis a Spica Virginis	46. 24. 20 22. 52. 10	Long. ♎ Lat. aust.	7. 1. 0 21. 39. 0	♎ 7. 1. 29 21. 38. 50
4. 18. $1\frac{1}{2}$	a Corde Leonis a Spica Virginis	46. 2. 45 23. 52. 40	Long. ♎ Lat. aust.	10. 15. 0 22. 24. 0	♎ 10. 16. 5 22. 24. 0
7. 17. 48	a Corde Leonis a Spica Virginis	44. 48. 0 27. 56. 40	Long. ♎ Lat. aust.	3. 0. 0 25. 22. 0	♎ 3. 7. 33 25. 21. 40
17. 14. 43	a Corde Leonis ab Hum. Orionis dext.	53. 15. 15 45. 43. 30	Long. ♌ Lat. aust.	2. 56. 0 49. 25. 0	♌ 2. 56. 0 49. 25. 0
19. 9. 25	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	35. 13. 50 52. 56. 0	Long. ♊ Lat. aust.	28. 40. 30 45. 48. 0	♊ 28. 43. 0 45. 46. 0
20. 9. $53\frac{1}{2}$	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	40. 49. 0 40. 4. 0	Long. ♊ Lat. aust.	13. 3. 0 39. 54. 0	♊ 15. 5. 0 29. 53. 0
21. 9. $9\frac{1}{2}$	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	26. 21. 25 29. 28. 0	Long. ♊ Lat. aust.	2. 16. 0 33. 41. 0	♊ 2. 18. 30 33. 39. 40
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	29. 47. 0 20. 29. 30	Long. ♉ Lat. aust.	24. 24. 0 27. 45. 0	♉ 24. 27. 0 27. 46. 0
26. 7. 58	a Lucida Arietis ab Aldebaran	23. 20. 0 26. 44. 0	Long. ♉ Lat. aust.	9. 0. 0 12. 36. 0	♉ 9. 2. 28 12. 34. 13
27. 6. 45	a Lucida Arietis ab Aldebaran	20. 45. 0 28. 10. 0	Long. ♉ Lat. aust.	7. 5. 40 10. 23. 0	♉ 7. 8. 45 10. 23. 13
28. 7. 39	a Lucida Arietis a Palilicio	18. 29. 0 29. 37. 0	Long. ♉ Lat. aust.	5. 24. 45 8. 22. 50	♉ 5. 27. 12 8. 23. 37
31. 6. 45	a Cing. Androm. a Palilicio	30. 48. 10 32. 53. 30	Long. ♉ Lat. aust.	2. 7. 40 4. 13. 0	♉ 2. 8. 20 4. 16. 25
Jan. 1665. 7. 7. $37\frac{1}{2}$	a Cing. Androm. a Palilicio	25. 11. 0 37. 12. 25	Long. ♈ Lat. bor.	28. 24. 47 0. 54. 0	♈ 28. 24. 0 0. 53. 0
13. 7. 0	a Capite Androm. a Palilicio	28. 7. 10 38. 55. 20	Long. ♈ Lat. bor.	27. 6. 54 3. 6. 50	♈ 27. 6. 39 3. 7. 40
24. 7. 29	a Cin. Androm. a Palilicio	20. 32. 5 40. 5. 0	Long. ♈ Lat. bor.	26. 29. 15 5. 25. 50	♈ 26. 28. 50 5. 26. 0
Feb. 7. 8. 37			Long. ♈ Lat. bor.	27. 24. 46 7. 3. 26	♈ 27. 24. 55 7. 3. 15
22. 8. 46			Long. ♈ Lat. bor.	28. 29. 46 8. 12. 36	♈ 28. 29. 58 8. 10. 25
Mart. 1. 8. 16			Long. ♈ Lat. bor.	29. 18. 15 8. 36. 26	♈ 29. 18. 20 8. 36. 12
7. 8. 37			Long. ♈ Lat. bor.	0. 2. 48 8. 56. 30	♉ 0. 2. 42 8. 56. 56

Mense Februario anni ineuntis 1665, stella prima Arietis quam in sequentibus vocabo γ, erat in ♈ $28^{gr}.\ 30'.\ 15''$. cum latitudine boreali

7^{gr}. 8′. 58″. secunda Arietis erat in ♈ 29^{gr}. 17′. 18″. cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 16″. et stella quædam alia septimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in ♈ 28^{gr}. 24′. 45″. cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 33″. Cometa verò Feb. 7^{d}. 7′. 30″. Parisiis (id est Feb. 7^{d}. 8′. 37″. Gedâni) st. vet. triangulum constituebat cum stellis illis γ et A rectangulum ad γ. Et distantia cometæ a stella γ æqualis erat distantiæ stellarum γ et A, id est 1^{gr}. 19′. 46″. in circulo magno, atque ideò ea erat 1^{gr}. 20′. 26″. in parallelo latitudinis stellæ γ. Quare si de longitudine stellæ γ detrahatur longitudo 1^{gr}. 20′. 26″. manebit longitudo cometæ ♈ 27^{gr}. 9′. 49″. Auzoutius ex hâc suâ observatione cometam posuit in ♈ 27^{gr}. 0′. circiter. Et ex schemate, quo Hookius motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26^{gr}. 59′. 24″. Ratione mediocri posui eundem in ♈ 27^{gr}. 4′. 46″. Ex eâdem observatione Auzoutius latitudinem cometæ jam posuit 7^{gr}. et 4′. vel 5′. boream versus. Eandem rectius posuisset 7^{gr}. 3′. 29″. existente scilicet differentiâ latitudinum cometæ et stellæ γ æquali differentiæ longitudinum stellarum γ et A.

Feb. 22^{d}. 7^{h}. 30′. Londini, id est Feb. 22^{d}. 8^{h}. 46′. Gedani, distantia cometæ a stella A, juxta observationem Hookii a seipso in schemate delineatam, ut et juxta observationes Auzoutii a Petito in schemate delineatas, erat pars quinta distantiæ inter stellam A et primam Arietis, seu 15′. 57″. Et distantia cometæ a linea jungente stellam A et primam Arietis erat pars quarta ejusdem partis quintæ, id est 4′. Ideóque cometa erat in ♈ . 8^{gr}. 29′. 46″. cum lat. bor. 8^{gr}. 12′. 36″.

Mart. 1^{d}. 7^{h}. 0′. Londini, id est Mart. 1^{d}. 8^{h}. 16′. Gedani, cometa observatus fuit prope secundam Arietis, existente distantiâ inter eosdem ad distantiam inter primam et secundam Arietis, hoc est ad 1^{gr}. 33′. ut 4 ad 45 secundum Hookium, vel ut 2 ad 23 secundum Gottignies. Unde distantia cometæ a secundâ Arietis erat 8′. 16″. secundum Hookium, vel 8′. 5″. secundum Gottignies, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa verò secundum Gottignies jam modo prætergressus fuerat secundam Arietis quasi spatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id est 1′. 35″. circiter (quocum satis consentit Auzoutius) vel paulo minorem secundum Hookium, puta 1′. Quare si ad longitudinem primæ Arietis addatur 1′. et ad latitudinem ejus 8′. 10″. habebitur longitudo cometæ ♈ 29^{gr}. 18′. et latitudo borealis 8^{gr}. 36′. 26″.

Mart. 7^{d}. 7^{h}. 30′. Parisiis (id est Mart. 7^{d}. 8^{h}. 37′. Gedani) ex observationibus Auzoutii distantiâ cometæ a secundâ Arietis æqualis erat distantiæ secundæ Arietis a stellâ A, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ et secundæ Arietis erat 45′. vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. ideóque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex schemate observationum Auzoutii, quod Petitus construxit, Hevelius deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54′. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, et Hevelius in schemate observationum Auzoutii a se constructo incurvationem irregularem correxit, et sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56′. vel 8gr. 57′.

Visus etiam fuit hic cometa Martii die 9, et tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′. cum lat. bor. 9gr. 3½′ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, et uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; et motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ a principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem et perihelium, seu constituendo (x) angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (et hujus et superioris) parallaxis annua insignis fuit, (y) et indè demonstratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat, Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♍ 23gr. 23′.; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′.; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″.; distantia perihelia a Sole 56020, existente radio orbis magni 100000, et tempore perihelii Julii 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab Halleio computata, et cum locis a Flamstedio observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

(x) * *Angulum illum* inter nodum ascendentem et perihelium invenerat Halleius 49°.27′.30″. constituto autem angulo illo 49°. 27′. 18″. computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, et theoriâ a principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum Telluris quiete conciliari possit, legatur apud Ricciolium in Almagesto, Tacquetum in Astronomiâ, aliosque passim, ubi de planetarum retrogradationibus agunt.

1683. Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13. 12. 55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5. 42	29. 28. 13	♋ 13. 6. 42	29. 28. 20	+ 1. 0	+ 0. 7
15. 11. 15	2. 5.12	11. 37. 4	29. 34. 0	11. 39. 43	29. 34. 50	+ 1. 55	+ 0. 50
17. 10. 20	4.45.45	10. 7. 6	29. 33. 30	10. 8. 40	29. 34. 0	+ 1. 34	+ 0. 30
23. 13. 40	10.38.21	5. 10. 27	28. 51. 42	5. 11. 30	28. 50. 28	+ 1. 3	− 1. 14
25. 14. 5	12.35.28	3. 27. 53	24. 24. 47	3. 27. 0	28. 23. 40	− 0. 53	− 1. 7
31. 9. 42	18. 9.22	♊ 27. 55. 3	26. 22. 52	♊ 27. 54. 24	26. 22. 25	− 0. 39	− 0. 27
31. 14. 55	18.21.53	27. 41. 7	26. 16. 57	27. 41. 8	26. 14. 50	+ 0. 1	− 2. 7
Aug. 2. 14. 56	20.17.16	25. 29. 32	25. 16. 19	25. 28. 46	25. 17. 28	− 0. 46	+ 1. 9
4. 10. 49	22. 2.50	23. 18. 20	24. 10. 49	23. 16. 55	24. 12. 19	− 1. 25	+ 1. 30
6. 10. 9	23.56.45	20. 42. 23	22. 47. 5	20. 40. 32	22. 49. 5	− 1. 51	+ 2. 0
9. 10. 26	26.50.52	16. 7. 57	20. 6. 37	16. 5. 55	20. 6. 10	− 2. 2	− 0. 27
15. 14. 1	♍ 2.47.13	3. 30. 48	11. 37. 33	3. 26. 18	11. 32. 1	− 4. 30	− 5. 32
16. 15. 10	3.48. 2	0. 43. 7	9. 34. 16	0. 41. 55	9. 34. 13	− 1. 12	− 0. 3
18. 15. 44	5.45.33	♉ 24. 52. 53	5. 11. 15	♉ 24. 49. 5	5. 9. 11	− 3. 48	− 2. 4
			Austr.		Aust.		
22. 14. 44	9.35.49	11. 7. 14	5. 16. 58	11. 7. 12	5. 16. 58	− 0. 2	− 0. 3
23. 15. 52	10.36.48	7. 2. 18	8. 17. 9	7. 1. 17	8. 16. 41	− 1. 1	− 0. 28
26. 16. 2	13.31.10	♈ 24. 45. 31	16. 38. 0	♈ 24. 44. 0	16. 38. 20	− 1. 31	+ 0. 20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♉ 21^{gr}. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17^{gr}. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2^{gr}. 52′. 50″. Distantia perihelia a Sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii Sept. 4^{d}. 7^{h}. 39′. Loca verò ex observationibus Flamstedii computata, et cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18. 14. 28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	− 0. 12	+ 0. 12
20.15.38	7.55.52	24. 46. 23	26.14.42	24.46 22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1. 50
21. 8.21	8.36.14	29. 37. 15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	− 0. 47	+ 2. 26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6. 29. 53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0. 10	+ 1. 30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12. 37. 54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3. 42
30. 7.45	17.19.41	15. 36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0. 43	− 0. 34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20. 30. 53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3. 49	+ 3. 11
4. 7.22	22.11.28	25. 42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1. 48
5. 7.32	23.10.29	27. 0. 46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1. 22	− 0. 43
8. 7.16	26. 5.58	29. 58. 44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0. 44. 10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0. 45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. Bradleo, Astronomiæ apud Oxonienses Professore Saviliano) erat in ♈ 14^{gr}. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49^{gr}. 59′. Perihelium in ♉ 12^{gr}. 15′. 20″. Distantia perihelia a Sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, et tempore æquato perihelii Sept. 16^{d}. 16^{h}. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe a Bradleo computata, et cum locis a seipso et patruo suo D. Poundio, et a D. Halleio observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

1723. Tempus Æquat.	Comet. Long. Observat.	Lat. Bor. Observat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. '	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	"	"
Oct. 9. 8. 5	♒ 7. 22. 15	5. 2 0	♒ 7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	− 47
10. 6. 21	6. 41. 12	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 43. 18	− 50	+ 55
12. 7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	− 21	+ 5
14. 8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	− 48	− 11
15. 6. 35	4. 47. 41	15. 40. 51	4. 47. 45	15. 40. 55	− 4	− 4
21. 6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	− 14
22. 6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	− 8	− 5
24. 8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
29. 8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	− 25	+ 7
30. 6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	− 8	+ 16
Nov. 5. 5. 53	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	− 18	− 10
14. 6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	− 35	+ 30
20. 7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	− 53	− 32
Dec. 7. 6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè satis manifestum est, quod motus cometarum per theoriam a nobis expositam non minus accuratè exhibentur, quàm solent motus planetarum per eorum theorias. ([z]) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, et tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem sciri, et tum demum orbium ellipticorum latera transversa et apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus nodus ascendens (computante Halleio) erat in ♉ $20^{gr}. 21'$.; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat $17^{gr}. 2'$.; perihelium erat in ♒ $2^{gr}. 16'$.; et distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio Octob. $16^{d}. 3^{h}. 50'$. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus et idem, revolvetur hic cometa spatio annorum 75, ([a]) et axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}$: 75 × 75 ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. ([b]) Et distantia aphelia cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. ([c]) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellip-

([z]) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri possint, variis methodis suprà exposuimus.

([a]) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172).

([b]) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ a Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000 erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1778 et distantiam periheliam 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus a Sole erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

([c]) * *Quibus cognitis.* (Per Prop. XX. Lib. I.).

ticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur et altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, et magnam apheliorum a Sole distantiam, et longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, et eorum eccentricitates et revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, et iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quàm quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent et motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur zodiaco.* Ex observato sæpè sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi zodiaco more planetarum, sed indè migrare et motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen clariss. Cassinus in Monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verùm eo artificio utitur vir doctissimus ut distantiam cometæ a Terrâ vel Sole pro arbitrio assumat, et modò Tellurem inter Solem et cometam, modò cometam inter Solem et Tellurem ac denique Solem inter cometam et Tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria determinantur. Sic Halleius definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. et 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat clariss. Cassinus, talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quàm probè tamen cum observationibus theoria congruat, ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti sine ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum ferè non excurrat; quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoquè distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præter quàm quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit clariss. vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27. diem Novembris per nodum descendentem transierit et versus diem 17. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quàm unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum eclipticæ trajecisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. Monum. Paris. leguntur percurrere longiùs foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur et a gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verùm his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem Telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà Solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius a nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori et Telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed a Newtonianâ cometarum theoriâ, quæ phænomenis consentanea est, nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis, quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus, et ipsa, prout nobis visum est, rei veritas et commentatorum officium a nobis postulabant.

moventur, quam longissimè distant ab invicem, et se mutuò quàm minimè trahant. Quâ de causâ cometæ, quia altiùs descendunt, ideóque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis; et propter summam velocitatem in viciniâ illâ, et densitatem aliquam atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, et aliquantulum retardari, et propiùs ad Solem accedere: et singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed et in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, et subindè in Solem incidere. (e) Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem et vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, et novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, et sub initio quàm maximè splendent, et subindè paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ quam Cornelius Gemma octavo Novembris 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (Novemb. 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, et luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc Tycho Brahæus vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; et ex eo tempore paulatim decrescentem et spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense Novembri, ubi primùm apparuit, Venerem luce suâ æquabat. Mense Decembri nonnihil diminuta Jovem æquare videbatur. Anno

(e) 174. * *Sic etiam stellæ fixæ.* De stellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet clariss. D. de Maupertuis in eximio Opusculo de Figuris Astrorum et in Mon. Paris. an. 1734. Fixas, quæ sunt totidem Soles, variis donatas esse figuris et ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam a sphæroide propemodum sphærico per innumeros gradus depressionis versus polos tandem devenitur ad planum circulare, si continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num. 56. His positis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evanescant, cur mutetur apparens stellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur stellæ aliquæ quasi recens accensæ oriri visæ sint, quædam verò quasi extinctæ videri desierint. Si in stellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem suam nobis obvertunt, sphærarum instar apparebunt. Si autem respectu nostri situm suum mutent, magis vel minus stellarum illarum splendor decrescet, prout hoc vel illo modo sese nobis ostendent, ac tandem exiguæ crassitiei latus exhibeant et satis longè a nobis distent, conspectui nostro sese omninò subducent. Quomodò autem fixæ respectu nostri positionem suam mutent, explicari potest, si ponamus circà stellam compressam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ et ad æquatorem stellæ inclinatâ; in hâc enim hypothesi, planeta ad perihelium suum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, et hinc fieri poterit ut partem lucidam disci nobis obversam conspiciamus, quæ ob exiguam lateris compressi crassitiem oculos nostros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri posse ut circà planetam congregetur annulus Saturni annulo similis, si nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuissimis æstu Solis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli instar posset detorqueri; imò impossibile non foret ipsum quoquè corpus cometæ circà planetam rapi et sic planeta satellitem acquireret. Haberet autem planeta satellitem sine annulo, si cometa destitueretur caudâ, sed adjicietur etiam annulus, si cometa caudam habuerit, atquè annulus aderit sine satellite, si cauda duntaxat a planetâ attrahatur. Hæc sunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterum in laudatis opusculis elegantissima sunt Problemata quæ consulat lector.

1573, mense Januario minor erat Jove et major Sirio, cui in fine Februarii et Martii initio evasit æqualis. Mense Aprili et Maio stellis secundæ magnitudinis, Junio, Julio et Augusto stellis tertiæ magnitudinis, Septembri, Octobri et Novembri stellis quartæ, Decembri et anni 1574 mense Januario stellis quintæ, et mense Februario stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, et mense Martio ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, et anni 1573 mense Martio rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran, Maio autem altitudinem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam Kepleri discipuli anno 1604, die 30 Septembris st. vet. apparere cœpisse observarunt, et luce suâ stellam Jovis superasse, cùm nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, et spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente Hipparchus ad fixas observandas et in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent et evanescunt, quæque paulatim crescunt, et luce suâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, et revolvendo partem lucidam et partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex Sole et stellis fixis et caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum et ibi condensari et converti in aquam et spiritus humidos, et subindè per lentum calorem in sales, et sulphura, et tincturas, et limum, et lutum, et argillam, et arenam, et lapides, et coralla, et substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

([f]) Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum a Sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportione sesquiplicatâ distantiarum a Sole, tempora periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicatâ distantiarum proportione. Ut vortices minores circum Saturnum, Jovem et alios planetas gyrati conserventur et tranquillè natent in vortice Solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis et planetarum

([f]) * *Hypothesis vorticum.* (Prop. LII. Lib. II. cum Coroll. Schol. Prop. XL. Lib. II. et not. 175. Lib. huj.).

circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo Boyliano, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis et aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt suprà atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrimè moveri debent; et propterea planetæ et cometæ in orbibus specie et positione datis secundum leges suprà expositas perpetuò revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitùs acquirere per leges hasce minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem et Saturnum in circulis concentricis, eâdem motûs directione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, et in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motûs genere cometæ per orbes planetarum celerrimè et facillimè transeunt, et in apheliis suis ubi tardiores sunt et diutiùs morantur, quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quàm minimè trahant. Elegantissima hæcce Solis, planetarum et cometarum compages non nisi consilio et dominio entis intelligentis et potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cùm lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, et systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi viri Joannes et Daniel Bernoullius, prior in Physicâ Cœlesti, posterior in Disquisitionibus Pysico-astronomicis mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cùm mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Joan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt præternaturales et miraculo tribuendæ; sed magnum philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.) Numquid pari jure Cartesianum philosophum possumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices secundum varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hærere causamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum philosophum non dedecet.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa et ad servos refertur: et deitas est dominatio dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus Israëlis, deus deorum, et dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æternus vester, æternus Israëlis, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox deus passim (†) significat dominum: sed omnis dominus non est deus. Dominatio entis spiritualis deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur deum verum esse vivum, intelligentem et potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summè perfectum. Æternus est et infinitus, omnipotens et omnisciens, id est, durat ab æterno in æternum, et adest ab infinito in infinitum: omnia regit, et omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas et infinitas, sed æternus et infinitus; non est duratio et spatium, sed durat et adest. Durat semper, et adest ubique, et existendo semper et ubique, durationem et spatium constituit. Cùm unaquæque spatii particula sit *semper*, et unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nusquam*. Omnis anima sentiens diversis temporibus, et in diversis sensuum, et motuum organis eadem est persona indivisibilis. Partes dantur successivæ in duratione, co-existentes in spatio, neutræ in persona hominis seu principio ejus cogitante; et multò minùs in substantiâ cogitante dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus et idem homo durante vitâ suâ in omnibus et singulis sensuum organis. Deus est unus et idem deus semper et ubique. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantiâ subsistere non potest. In ipso (‡) continentur et moventur universa, sed sine mutuâ passione. Deus

(*) Id est imperator universalis.

(†) Pocokius noster vocem *dei* deducit a voce Arabicâ *du*, (et in casu aliquo *di*,) quæ dominum significat. Et hoc sensu principes vocantur *dii*, Psal. LXXXIV. 6. et Joan. X. 45. Et Moses dicitur *deus* fratris Aaron, et *deus* regis Pharaoh (Exod. IV. 16. et VII. 1.). Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur dii, sed falso propter defectum dominii. (Nota Autoris.)

(‡) Ita sentiebant veteres, ut Pythagoras apud Ciceronem, de Naturâ Deorum, Lib. I. Thales, Anaxagoras, Virgilius, Georgic. Lib. IV. v. 220. et Æneid. Lib. VI. v. 721. Philo Allegor. Lib. I. sub initio. Aratus in Phænom. sub initio. Ita etiam scriptores sacri, ut Paulus in Act. XVII. 27. 28. Johannes in Evang. XIV. 2. Moses in Deut. IV. 39. et X. 4. David Psal. CXXXIX. 7. 8. 9. Salomon 1 Reg. VIII. 27. Job. XXII. 12. 13. 14. Jeremias XXIII. 23. 24. Fingebant autem idololatræ Solem, Lunam, et astra, animas hominum et alias mundi partes esse partes Dei summi, et ideò colendas, sed falsò. (Nota Auctoris.)

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentiâ dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: et eâdem necessitate *semper* est et *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, et agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit et intelligit omnia. Corpore omni et figurâ corporeâ prorsus destituitur, ideóque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantùm corporum figuras et colores, audimus tantùm sonos, tangimus tantùm superficies externas, olfacimus odores solos, et gustamus sapores: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; et multò minùs ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus et attributa, et per sapientissimas et optimas rerum structuras et causas finales, et admiramur ob perfectiones; veneramur autem et colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, et deus sine dominio, providentiâ, et causis finalibus nihil aliud est quàm fatum et natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper et ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis, et voluntate entis necessariò existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo a rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de Deo, de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cœlorum et maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis a causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra Solis et planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; et cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, et recedendo a Sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem Saturni, [h] ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, et ad usque ultima cometarum aphelia, si modò aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, et hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; et hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ Propositiones deducuntur ex phænomenis, et redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, et impetus corporum et leges motuum et gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, et agat secundum leges a nobis expositas, et ad corporum cœlestium et maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, et in iisdem latente; cujus vi et actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, et contiguæ factæ cohærent: et corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuscula vicina; et lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, et corpora calefacit; et sensatio omnis excitatur, et membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum et a cerebro in musculos propagatis. [i] Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accuratè determinari et monstrari debent.

(h) * *Ut ex quiete apheliorum.* Prop. II. Lib. huj.)

(i) * *Sed hæc paucis exponi non possunt.* De hoc subtilissimo spiritu plurimas quæstiones sibi proponit Newtonus in Tractatu Opticæ.

INDEX PROPOSITIONUM

IN

VOLUMINIS III. PARTE II.

Pag.

PROP. XXV. PROBL. VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.. 1

PROP. XXVI. PROBL. VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari describit.............................. 4

PROP. XXVII. PROBL. VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terrâ.............................. 11

PROP. XXVIII. PROBL. IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate moveri deberet............... ibid.

PROP. XXIX. PROBL. X.

Invenire variationem Lunæ.................... 17

PROP. XXX. PROBL. XI.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.............................. 22

PROP. XXXI. PROBL. XII.

Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.............................. 32

PROP. XXXII. PROBL. XIII.

Invenire motum medium nodorum Lunæ.. 39

PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

Invenire motum verum nodorum Lunæ.... 45

Pag.

PROP. XXXIV. PROBL. XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ......... 56

PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ............... 61

PROP. XXXVI. PROBL. XVII.

Invenire vim Solis ad mare movendum..... 107

PROP. XXXVII. PROBL. XVIII.

Invenire vim Lunæ ad mare movendum.... 109

PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

Invenire figuram corporis Lunæ............ 114

PROP. XXXIX. PROBL. XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum...... 122

PROP. XL. THEOR. XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri et radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere....................... 134

PROP. XLI. PROBL. XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.. 146

PROP. XLII. PROBL. XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.... 187

FINIS.

GLASGUÆ:
ANDREAS ET JOANNES M. DUNCAN,
Academiæ Typographi.